3450

अंकगणितनी रीतो ने तेनां कारण.

છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ અને ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કાલરોના ઉપયોગ સારૂ.

રચનાર
વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઇ,
આબકારી ઇન્સ્પેકટર પ્ર. ડાંગ
અને નવાપુરા.

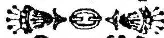
આવૃત્તિ બીજી
અમદાવાદ
આર્યોદય પ્રેસ.

સંવત ૧૯૪૪—સન ૧૮૮૮.

કીમત ૬ આના.



अंकगणितनी रीतो ने तेनां कारण.



છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ અને ટ્રેનિંગ
કાલેજના સ્કાલરોના ઉપયોગ સારૂ.

રચનાર
વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઇ.
આબકારી ઇન્સ્પેક્ટર પ્ર. ડાંગ
અને નવાપુરા.

આવૃત્તિ બીજી
અમદાવાદ
આર્યોદય પ્રેસ.
—0—
સંવત ૧૯૪૪—સન ૧૮૮૮.

કીમત ૬ આના.



અર્પણ પત્રિકા.

રા. બા. ગોપાળજી સુરભાઇ દેશાઇ

ફેલો ઓફ ધી યુનીવર્સીટી.

આસિસ્ટંટ એજ્યુકેશનલ ઇન્સપેક્ટર

૩૫૦૬ કાઠીઆવાડ.

ગુજરાતના ઘણા ભાગમાં કેળવણીનો શરૂઆતથી પ્રચાર કરવામાં આપનો એક સરખો ઉત્સાહ અને આગ્રહ તથા મારી સાથેના લાંબી મુદતના પ્રેમની યાદગીરી રાખવાના પવિત્ર હેતુથી આ શાલોપયોગી પુસ્તક હું આપને પ્રેમપૂર્વક અર્પણ કરૂં છું તે સ્વિકારશો.

સેવક.

વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઇ.



પ્રસ્તાવના.

—:o:—

અંકગણિતની રીતોનાં કારણ સમજ્યા વગર માત્ર રીતો જાણી દાખલા ગણી જવાથી એ વિષયનાં મૂળતત્વનું ખરૂં જ્ઞાન થતું નથી અને તેથી તે વિષય પરિપક્વ આવડ્યો ગણાય નહિ. તેમજ કારણ જાણ્યા વગર વિદ્યાર્થીનું મન પ્રફુલ્લિત થતું નથી. કારણ એ, તે વિષયનો પાયો છે. જેમ પાકા પાયા વગર ઈમારત ટકતી નથી તેમ કારણ સમજ્યા વગર અંકગણિતનું જ્ઞાન નિષ્ફળ જાય છે. માટે દરેક વિદ્યાર્થીને એની અગત્ય છે.

સરકારી અંકગણિતમાં અને બીજાં અંકગણિતોમાં અંકગણિતની રીતોનાં કારણો આપેલાં છે પણ તે છોકરાંના મન ઉપર ઠસાવવામાં આવતાં હોય એમ જણાતું નથી. વળી તે લંબાણમાં ને છૂટક છૂટક હોવાથી છોકરાંને સમજવાને ગુંચવણ પડે છે. તેથી એ કારણો વિષયવાર સામટાં સહેલી ભાષામાં લખેલાં હોય તો તે છોકરાંને વધારે ઉપયોગી થઈ પડે. આવું એકે પુસ્તક ગુજરાતીમાં આજ સુધી બહાર પડ્યું નથી. તેવા પુસ્તકની હું જ્યારે રાજકોટ ટ્રેનિંગ કાલેજમાં હતો ત્યારથી મને જરૂર જણાઇ હતી. છઠ્ઠા ધોરણનો અભ્યાસ કરનારા વિદ્યાર્થીને અને ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કાલરોને એવી ચોપડી વગર ઘણી અડચણ પડતી જાણવામાં આવવાથી તે દૂર કરવાના ઇરાદાથી તથા અંકગણિતનું જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને બરાબર મળી શકે એ ઇરાદાથી આ નાનું પુસ્તક બહાર પાડ્યું છે.

એ પુસ્તકમાં સરકારી અંકગણિતમાં જેટલા વિષયો આપે-

ક્ષા છે તેનાં કારણ ઉપરાંત છેદરાશી, બંને જાતની શ્રેઢીનાં કારણો તથા સંખ્યાનો પાયો, જેટલી બની શકે તેટલી સહેલી ભાષામાં ટુંકામાં સ્પષ્ટતાથી સમજાવવા યત્ન કર્યો છે તથા અમુક રીતોના મિશ્રણથી કેવા પ્રકારના દાખલા થઇ શકે છે તે પણ જ્યાં જરૂર જણાઇ ત્યાં આપ્યું છે. મતલબ કે જેમ બને તેમ વિદ્યાર્થીઓને આ ચોપડી ઉપયોગી થઈ પડે તેવો, બની શકે તેટલો પ્રયત્ન કર્યો છે. મારો એ પ્રયત્ન કેટલે સફળ થયો છે તે તેના ઉપયોગ થવા ઉપરથી સમજાશે.



अंकगणितनां कारण.

આપણી સંખ્યાનો પાયો દશનો કહેવાયછે તેનું કારણ.

કોઇપણ સંખ્યા ૦, ૧, ૨, ૩, ૪, ૫, ૬, ૭, ૮, ૯ એ દશ આંકડાવડે બતાવાયછે. એમાં ૦ ની કીંમત કાંઇ નથી, ૧ ની કીંમત એક, ૨ ની કીંમત બેવાર એક અથવા બે. ૯ની કીંમત નવ વાર એક અથવા નવ. એવા એક જાતના કેટલાક એકમો એકઠા કરવાથી સંખ્યા થાય છે. એ સંખ્યા બે આંકડાથી બતાવાય ત્યારે તેમાં પહેલો અથવા ડાબા હાથ ભણીનો આંકડો દશક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે દશ ગણો હોય છે. એજ પ્રમાણે દશકની પહેલાં એક આંકડો હોય તો તે શતક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે સો ગણો અથવા દશક કરતાં દશ ગણો હોય છે. એ પ્રમાણે આપણી સંખ્યામાં જમણા હાથ ભણીના આંકડાના સ્થાન કરતાં દરેક ડાબા હાથ ભણીના આંકડાનું સ્થાન દશ દશ ગણું વધતું જાયછે અને તેથીજ આપણી સંખ્યાનો પાયો દશનો કહેવાય છે.

સરવાળો.

સરવાળાની રીતનું કારણ.

એક કરતાં વધારે સંખ્યાઓને એકઠી કરવાની રીતને સરવાળો કહે છે. સરવાળો કરવાને સુગમ પડે માટે એક સંખ્યાની નીચે બીજી, ને તેની નીચે ત્રીજી, અને તેમાં પણ પહેલી સંખ્યાના એકમ નીચે બીજીનો એકમ, દશક નીચે દશક એ પ્રમાણે લખાયછે,

પછી બધી સંખ્યાના એકમો એકઠા કરી તેમાંથી જેટલા દશક નીકળે તેટલા કહાડી દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવાને વધેલા એકમના સ્થાનમાં લખવા. દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાંથી શતક નીકળે તો કહાડી તેને શતકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવા, ને વધેલા દશક, દશકના સ્થાનમાં લખવા. એજ પ્રમાણે આગળ પણ કરતા જવું.

સરવાળો સજાતિય સંખ્યાઓનો કે સાદી સંખ્યાઓનોજ થાય, કેમકે પાંચ રૂપિઆમાં આઠ રૂપિઆ ઉમેરાય પણ આઠ ઘર ઉમેરાય નહીં, તેમજ સરવાળો એકમના સ્થાનથી કરાય, કેમકે એકનમાંથી દશક નીકળે તે દશકના સ્થાનમાં ઉમેરતાં સુગમ પડે, પણ દશકના સ્થાનના અંકોનો સરવાળો પ્રથમ મૂક્યા પછી એકમ સ્થાન અંકોના સરવાળામાંથી દશક નીકળે તે ઉમેરવા પડે ત્યારે પ્રથમ મૂકેલા દશક રદ કરવા પડે અને એ પ્રમાણે પહેલાંના અંકોના સરવાળામાં પણ હરકત આવે, તે હરકત દૂર કરવાનેજ સરવાળો જમણી તરફથી કરીએ છીએ.

બાદબાકી.

બાદબાકીની રીતનું કારણ.

બાદબાકી પણ સજાતિય સંખ્યાનીજ થાય અને તે સરવાળાની પેઠે મોટી સંખ્યાના એકમની નીચે નાની સંખ્યાના એકમ અને દશકની નીચે દશક મૂકીને લખાય, અને બાદબાકી કરવાની રીત પણ સરવાળાની પેઠે એકમથી શરૂ થાય છે. મોટીના એકમમાંથી નાનીના એકમ બાદ કરવા પણ જો મોટીના એકમ ઓછા હોય તો તેના દશકમાંથી એક દશક લેઇ તેના દશ એકમ, એકમમાં ઉ-

મેરી તેમાંથી બાદ્યાંકના એકમ બાદ કરવા. પછી અધિકાંકના દશક-માંથી એક દશક લીધો હતો તે, તેમાંથી ઓછો કરવાને બદલે બા-દ્યાંકના દશકમાં એક ઉમેરી અધિકાંકના દશકમાંથી બાદ કરીએ તો પણ ચાલે. પણ જો તે બાદ ન થઈ શકતા હોય તો એકમની પેઠે દશકમાં પણ એક શતક લેઇ તેના દશ દશક ઊમેરી ઉપર પ્રમાણે કરવું. આ પ્રમાણે હલકા સ્થાનથી બાદબાકી કરવાનું સરવાળાની માફક સુગમ પડેછે તેથી બાદબાકી પણ જમણી તરફથી કરવા-ની રીત રાખી છે.

ગુણાકાર.

એકની એક સંખ્યા કેટલીક વખત લેઇ તેનો સરવાળો કરવા-ની સહેલી રીતને ગુણાકાર કહે છે. જેમ કે ચાર રૂપિઆ પાંચવાર લેઇએ તો ચાર રૂપિઆને પાંચવાર મૂકી સરવાળો કરવાથી અને ચાર રૂપિઆને પાંચે ગુણવાથી ૨૦ રૂપિઆ આવશે. આમાં ચાર રૂપિયાને ગુણ્ય, પાંચને ગુણક અને ૨૦ રૂપિઆને ગુણાકાર કહે છે. ગુણાકારમાં ગુણ્ય અને ગુણક બંને અથવા બેમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઇએ, પણ બંને સંયુક્ત સંખ્યા ન જોઇએ. ચાર ને પાંચ ગણા કરાય અથવા ચાર રૂપિઆને પાંચ ગણા કરાય પણ ચાર રૂપિયાને પાંચ રૂપિઆ ગણા કે પાંચ ઘર ગણા ન કરાય એ સ્પષ્ટ છે.

કોઇ સંખ્યાને શૂન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શૂન્ય આવે તેનું કારણ.

કોઇ પણ સંખ્યાને એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર તે સંખ્યા જે-ટલો આવે, પણ શુન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શુન્ય આવે, કેમકે ચા-રને એક ગણા કરીએ અથવા એકવાર લેઇએ તો ચાર આવે પણ અર્ધાવાર લેઇએ તો બે, પા વાર જોઇએ તો એક, ને ⅛વાર

લેઇએ તેા ૦॥, એમ ગુણુક ઘટાડતા જઇએ તેમ ગુણાકાર ઘટતેા જાયછે. એ ઉપરથી સમજાય છે કે ગુણુક ઓછામાં ઓછો લેઇએ તેા ગુણાકાર ઓછામાં ઓછો આવે, ને ગુણુક જેની કીંમત કાંઇ નથી, તેવેા (શૂન્ય) લેઈએ તેા ગુણાકાર શૂન્યજ આવે એ દેખીતુંછે.

ગુણાકાર જમણી તરફથી કરીએ છીએ તેનું કારણ.

ગુણાકાર પ્રથમ જમણી તરફથી કરીએ† છીએ, કેમકે આપણે સંખ્યા લખવામાં જમણી તરફ એકમ, તેની ડાબી તરફ દશક, એ પ્રમાણે દશ દશ ગણા ચડતા અંક ડાબી તરફ લખીએ છીએ. હવે એકમનેા ગુણાકાર કરતાં તેમાંથી દશક નીકળે તે કહાડી, દશકના ગુણાકારમાં ઉમેરવેા જોઈએ, ને દશકના ગુણાકારમાંથી શતક નીકળે તે શતકના ગુણાકારમાં ઉમેરવેા જોઇએ. પણ તેમ કરવું ડાબી તરફથી ગુણાકાર કરતા આવીએ તેા બહુ અવઘડ પડે માટે જમણી તરફથી ગુણાકાર શરૂ કરીએ છીએ.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ તેનું કારણ.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ કેમકે ગુણ્યને એકમે ગુણ્યા પછી ગુણુકના દશકે ગુણીએ છીએ. એટલે પ્રથમ અંક દશકનેા આવશે, ને પહેલાં એકમે ગુણેલી સંખ્યામાં પ્રથમ અંક એકમનેા છે તે એકમ નીચે દશકનેા અંક મૂકયાથી સરવાળેા કરવાને અડચણ પડે માટે એકમના ગુણાકારમાંના દશકની નીચે દશકના

---

† શીખનાર ગુણાકાર ભાગાકારની રીત શીખી ગયેલા છે ને તે રીત અંકગણિતમાં છે માટે તે રીતેા નહિ આપતાં તેનાં કારણજ માત્ર આપીશું. તેાપણ જ્યાં તે રીત આપ્યા વગર કારણ સમજાય તેમ નહિ હેાય, ત્યાં તે રીત પણ આપીશું ખરા.

ગુણાકારનો પહેલો અંક અથવા દશક મૂકીએ છીએ. અથવા પ્રથમ એકમે ગુણ્યા પછી બીજા અંકે (દશકે) ગુણવાના છે એટલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું આવશે. તેમજ શતકે ગુણીએ તો તે ગુણાકાર ઉપર બે મીંડાં મૂકવાને બદલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું નહિ મૂકતાં એક અંક કાપીએ છીએ અને શતકના ગુણાકાર ઉપર બે મીડાં મૂકવાને બદલે એમના ગુણાકારમાંથી એક અંક કાપીને મૂકીએ છીએ.

ભાગાકાર.

એક સંખ્યામાંથી બીજી નાની સંખ્યા કેટલી વખત બાદ જઇ શકે છે અથવા એક સંખ્યામાં બીજી નાની સંખ્યા કેટલીવાર રહેલી છે તે કહાડવાની સહેલી રીતને ભાગાકાર કહે છે. જેમકે ૨૦ રૂપિઆમાં ચાર રૂપિઆ કેટલીવાર રહેલા છે, તે ૨૦ રૂપિઆમાંથી ચાર રૂપિઆ પાંચવાર બાદ કરીશું અથવા ૨૦ રૂપિઆને ચાર રૂપિએ ભાગીશું તોપણ નીકળશે. આમાં ૨૦ રૂપિઆને ભાજ્ય, ચાર રૂપિઆને ભાજક ને પાંચને ભાગાકાર કહેછે. ભાજ્ય, ભાજક ને ભાગાકાર એ ત્રણ પદોમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઈએ અને સંયુક્ત સંખ્યા સજાતિય જોઇએ કેમકે ૨૦ રૂપિઆમાંથી ચાર રૂપિઆના ભાગ કરીએ તો પાંચ રૂપિઆ નહિ આવે અથવા ૨૦ રૂપિઆના પાંચ ભાગ કરીએ તો દરેક ભાગ ચાર રૂપિઆનો આવે પણ ૨૦ રૂપિઆમાંથી પાંચ ઘર જેટલા ભાગ ન થાય.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી કરીએ છીએ તેનું કારણ.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી પ્રથમ શરૂ કરીએ છીએ કેમકે ડાબી તરફના અંક દશ દશ ગણા વધારે છે ને જમણી તરફના અંક દશ દશ ગણા હલકા છે. હવે પ્રથમ ભારે અંકને ભાગતાં જે વધે તેને

તેની પાસેના ડાબી તરફના અંકસ્થાનનું રૂપ કરવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી તેને ભાજકે ભાગવા જોઈએ. દશે ગુણવાથી તે ગુણ્ય ઉપર એક મીડું આવે છે ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ તે અંક આવેછે. આ પ્રમાણે કરવું સહેલું પડેછે. પણ જો એકમથી ભાગતા જઇએ તો જે શેષ વધે તેને તેની પાસેના ડાબી તરફના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ભાગવા પડે એટલે અપૂર્ણાંક આવે. ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી ભાગવાથી અપૂર્ણાંક ભાગાકાર થશે. એ રીતે જેમ જેમ આગળ કરતા જઈશું તેમ તેમ અપૂર્ણાંક વધતો જશે, અને તેથી મુસ્કેલી પણ વધશે. વળી ભાગાકારમાં પણ ભારે અંકને ભાગતાં ભારે અંક આવશે અને તેના પછીનો તેથી દશ ગણો હલકો આવશે એટલે સંખ્યા લખવાના આપણા નિયમને અનુસરતું થશે. પણ એકમને ભાગતાં પ્રથમ એકમ, પછી દશક, એમ આવ્યાથી ભાગાકારની સંખ્યા ગોઠવવામાં પણ અડચણ પડવાની. આ એવડી અડચણ પહેલી રીતે કરવામાં નડતી નથી, માટે ભાગાકાર ડાબી તરફથી શરૂકરીએ છીએ.

ભાગાકાર કરતાં એક એક અંક ચઢાવની રીતનું કારણ.

આપણે ઉપર કહી ગયા કે પ્રથમ ભારે સ્થાનના અંકને ભાગતાં શેષ વધે તેને તેની પાસેના હલકા સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવો જોઇએ; પણ દશે ગુણતાં ગુણ્ય ઉપર મીડું આવે છે ને તેમાં તે અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ ઉમેરવાનો આવે છે એટલે દશે નહિ ગુણતાં પાસેના સ્થાનનો અંક શેષ ઉપર જમણી તરફ એકદમ ચઢાવી દેઇએ છીએ કેમકે તેથી કીંમતમાં ફેર પડતો નથી પણ જો શેષમાં પાણો વધી હોય તો દશે

ગુણીનેજ તેની પાસેના હલકા સ્થાનનો અંક ઉમેરવો પડે છે.

અવયવ પાડીને ભાગાકાર કરીએ ત્યારે શેષ કેટલા વધ્યા તે જાણવાની રીતનું કારણ—જો બે અવયવ હોય તે બીજા અવયવે ભાગતાં જે શેષ વધ્યા હોય તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેમાં પહેલા અવયવનો શેષ ઉમેર્યાથી ખરો શેષ આવશે. જો ત્રણ અવયવ હોય તો ત્રીજા અવયવના શેષને બીજા અવયવે ગુણી તેમાં બીજા અવયવનો શેષ ઉમેરવો, તે તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેનો શેષ ઉમેરવો. એટલે ખરો શેષ આવશે. કેમકે પહેલા અવયવે ભાગ્યાથી જે ભાગાકાર આવશે તે, તે અવયવ ગણો આવશે, તેને બીજા અવયવે ભાગ્યાથી વધેલો શેષ પહેલા અવયવ ગણો હોય માટે તેને સાદું રૂપ લાવવાને પહેલા અવયવ ગણા કરવા જોઈએ.

કોઇ સંખ્યાને શૂન્યે ભાગીએ તો ભાગાકાર અનંત આવે તેનું કારણ.—કોઇ સંખ્યાને એકે ભાગવાથી ભાગાકાર તેજ સંખ્યા આવે છે તે અરધે ભાગ્યાથી બમણા, પાએ ભાગ્યાથી ચોગણા એ રીતે ભાજક જેટલા ગણો ઘટાડીએ તેટલા ગણો ભાગાકાર આવેછે તો ભાજક શૂન્ય (જેની કીમત કાંઇ નથી) હોયતો ભાગાકાર અનંત આવે એ દેખીતું છે.

કોઈ બે રકમનો સરવાળો ને તેજ બે રકમોની બાદબાકી આપી હોય તો તે ઉપરથી એ બે રકમો કહાડવી હોય તો તે બે રકમોના સરવાળામાં બાદબાકી ઉમેરી બેએ ભાગવા એટલે બેમાંની એક મોટી રકમ આવશે, તે સરવાળામાંથી બાદ કર્યાથી નાની રકમ નીકળશે. અથવા આપેલા સરવાળામાંથી આપેલી બાદબાકી બાદ કરી, બેએ ભાગ્યાથી નાની રકમ નીકળશે, એ નાની રકમ સરવાળામાંથી બાદ કરવાથી મોટી રકમ નીકળશે.

કારણ—બે સંખ્યાના સરવાળા મોટી ને નાની બંને છે; માટે સરવાળો ને બાદબાકી ભેગાં કરીએ તો તે મોટાની બમણાઈ બરાબર થાય, એટલે તેને બે એ ભાગવાથી મોટી નીકળે, તેમજ સરવાળામાંથી બાદબાકી બાદ કરીએ, તો બે નાની બરાબર થાય, માટે તેને બેએ ભાગ્યાથી નાની નીકળે. અક્ષર ગણિતના નિયમો જાણનારા ઉપલી રીતોનું કારણ નીચલા સમિકરણ ઉપરથી જલદીથી સમજશે.

$$\text{મોટી} + \text{નાની} = \text{સરવાળો}$$
$$\text{મોટી} - \text{નાની} = \text{બાદબાકી}$$

સરવાળાથી $\quad 2\ \text{મોટી} = \text{સરવાળો} + \text{બાદબાકી}$

તો $\quad \text{મોટી} = \dfrac{\text{સરવાળો} + \text{બાદબાકી}}{2}$

તેમજ $\quad \text{મોટી} + \text{નાની} = \text{સરવાળો}.$
$$\text{મોટી} - \text{નાની} = \text{બાદબાકી}.$$

બાદબાકીથી $\quad 2\ \text{નાની} = \text{સરવાળો} - \text{બાદબાકી}$

તો $\quad \text{નાની} = \dfrac{\text{સરવાળો} - \text{બાદબાકી}}{2}$

જો ગુણ્યને ગુણક આપ્યા હોય તો રીત પ્રમાણે ગુણવાથી ગુણાકાર નીકળશે. પણ જો ગુણાકારને ગુણ્ય આપ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણ્યે ભાગ્યાથી ગુણક નીકળશે. ને ગુણાકારને ગુણક આપ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણકે ભાગ્યાથી ગુણ્ય નીકળશે.

કારણ.—ગુણ્યના ગુણક ગણો ગુણાકાર છે. માટે ગુણાકારના ગુણક ગણા ઓછા કરવાથી ગુણ્ય, ને ગુણ્ય ગણા ઓછા કરવાથી ગુણક નીકળે, એ દેખીતુંજ છે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

ગુણાકાર=ગુણ્ય×ગુણક. ગુણ્ય=ગુણાકાર÷ગુણક.

ગુણક=ગુણાકાર÷ગુણ્ય.

જો ભાજ્ય ને ભાજક આપ્યા હોય તો ભાજ્યને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર ને શેષ બંને નીકળશે. પણ જો ભાગાકાર, ભાજક ને શેષ આપેલા હોય તો ભાગાકાર ને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્યક આવશે. ને ભાગાકાર, ભાજ્ય ને શેષ આપ્યા હોય તો ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાજ્ય ને ભાગ્યાથી ભાજક નીકળશે.

કારણ.—ભાજ્ય ને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર આવે છે, ને શેષ વધેછે, માટે ભાગાકારને ભાજકે ગુણી શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્ય આવે. તેમજ ભાજ્ય એ ભાગાકાર ને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ ઉમેર્યા જેટલો છે, માટે ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાગ્યાથી ભાજક આવશે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

શેષ=ભાજ્ય−(ભાગાકાર×ભાજક)ભાગાકાર=(ભાજ્ય−શેષ)÷ભાજક

ભાજક=(ભાજ્ય−શેષ ÷ભાગાકાર ભાજ્ય=(ભાગાકાર×ભાજક)+શેષ.

દૃઢભાજક.

જો એક સંખ્યા, બીજી બે અથવા વધારે સંખ્યામાંની દરેકને કાંઈ પણ શેષ વધ્યા સિવાય ભાગી શકે તો તે સંખ્યા બીજી સંખ્યાઓનો સાધારણ નિ:શેષ ભાજક છે, એવો બે અથવા વધારે સંખ્યાઓનો જે મોટામાં મોટો સાધારણ નિ:શેષ ભાજક તે દૃઢભાજક જેમકે ૭૨, ૯૬, ૧૪૪, એનો બે, ચાર, ૭, બાર, ચોવીશ, એ

સધારણ નિ:શેષ ભાજક છે, પણ દૃઢભાજક તો ચોવીશજ કહેવાય.

દૃઢભાજકની રીતનું કારણ.—આપેલી બે સંખ્યામાંની નાની સંખ્યા, મોટીનો નિ:શેષ ભાજક હોય, તો તે નાની સંખ્યાજ બન્ને સંખ્યાનો દૃઢભાજક થશે; પણ નાની સંખ્યા મોટીનો નિ:શેષ ભાજક ન હોય, ને જે શેષ વધે, તે નાની સંખ્યાનો નિ:શેષ ભાજક હોય, તો તે શેષ નાની સંખ્યા ને મોટી સંખ્યાનો નિ:શેષ ભાજક થશે, એટલે દૃઢભાજ થશે. કેમકે જો શેષ નાની સંખ્યાને નિશેષ ભાગી શકે છે, તો તે નાની સંખ્યાના અમૂક ગણાને પણ ભાગી શકે છે. અથવા તેમાં શેષ ઉમેરીએ તેને પણ નિ:શેષ ભાગી શકે છે. હવે મોટી સંખ્યા તે નાની સંખ્યા વત્તા શેષ, અથવા, નાની સંખ્યાના અમૂક ગણા, વતા શેષની બરાબર છે. માટે નાની સંખ્યાએ મોટી સંખ્યાને ભાગતાં વધેલો શેષ, જો નાની સંખ્યાને નિ:શેષ ભાગી શકે, તો તે મોટી સંખ્યાને પણ નિ:શેષ ભાગી શકે, એટલે એ શેષજ આપેલી બને સંખ્યાનો દૃઢભાજક થશે. પણ જો તે શેષ (પહેલો શેષ નાની સંખ્યાને નિ:શેષ ભાગી ન શકે, ને શેષ વધે તો એ બીજો શેષ પહેલા શેષને નિ:શેષ ભાગી શકે છે કે નહિ તે જોવું. જો ભાગી શકે, તો એ બીજો શેષ, આપેલી બંને સંખ્યાનો પણ નિ:શેષ ભાજક થશે. કેમકે નાની સંખ્યા એ પહેલા શેષમાં બીજો શેષ ઉમેર્યાથી જે આવે તેટલી, અથવા પહેલા શેષના અમૂક ગણાવત્તા બીજા શેષ જેટલી છે. અને મોટી સંખ્યા, એ નાની, સંખ્યા, અથવા નાની સંખ્યા અમૂક ગણા વત્તા પહેલા શેષ જેટલી છે. જેમકે:—

૨૪ અને ૫૭ નો દૃઢ ભાજક કાઢવો હોય તો.

આમાં ૯ પહેલો, ૬ બીજો અને ત્રણ એ ત્રીજો શેષછે. હવે જો ત્રણ છ ને નિઃશેષ ભાગી શક્યો તો તે નવને પણ ભાગી શકશે. કેમકે ત્રણ એ છ ને અને ત્રણ ને નિઃશેષ ભાગી શકેછે; તો તે તેના સરવાળાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે તેમજ ત્રણ જો નવને ભાગી શકે, તો તે ૨૪ ને અને ૫૭ ને પણ ભાગી શકશે, કેમકે ૨૪ એ બે વાર નવ+૬ની બરાબરછે

```
૨૪|૫૭|૨
   ૪૮
   --
    ૯|૨૪|૨
      ૧૮
      --
       ૬|૯|૧
         ૬
         --
         ૩|૬|૨
           ૬
           --
           ૦
```

હવે જો ત્રણ એ નવને અને છને નિઃશેષ ભાગી શકેછે, તો તે નવના બમણા અને છ ના સરવાળાને પણ ભાગી શકેછે તેમજ ૫૭ એ બે વાર ચોવીસ+નવ છે ને ત્રણે ચોવીશને અને નવને ભાગી શકે છે, તો તે બે વાર ચોવીશ+નવને એટલે ૫૭ ને પણ ભાગી શકેછે તેથી ૨૪ અને ૫૭ નો દૃઢ ભાજક ત્રણજ છે.

બે કરતાં વધારે સંખ્યાના દૃઢભાજકની રીતનું કારણ.

જો ૨૪, ૫૪, ૬૯ એનો દૃઢભાજક કાઢવો હોય તો ૨૪ ને ૫૪ નો દૃઢભાજક ૬ આવશે અને છ અને ૬૯ નો ત્રણ આવશે; માટે એ ત્રણે સંખ્યાનો દૃઢભાજક ત્રણ આવશે. કારણ કે ૨૪ અને ૫૪ નો દૃઢ ભાજક છ આવશે, પણ તે ૬૯ નો દૃઢ નિઃશેષ ભાજક નથી, માટે છ અને ૬૯ નો દૃઢભાજક ત્રણ આવ્યો, તેજ ૨૪ અને ૫૪ નો પણ દૃઢભાજક થશે, કેમકે જે છ નો નિઃશેષ ભાજક હોય, તે છ ના સાધારણ નિઃશેષ ભાજ્ય ૨૪ અને ૫૪ નો પણ નિઃશેષ ભાજક થવાનો,

કોઇ સંખ્યાના નિ:શેષ ભાજક શોધી કહાડવાની રીત ને કારણ.

કોઇ સંખ્યાને છેડે એક મીડું હોય તો દશે, બે મીડાં હોય તો સોએ અને ત્રણ મીડાં હોય તો હજારે તેને નિશેષ ભાગી શકાશે. કેમકે તે સંખ્યા એ ભાજ્ય અને દશ, સો, હજાર, એ ભાજક છે, ને ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્ય છે. ગુણાકારમાં ગુણ્યને ગુણકનાં મીડાં ગુણાકાર ઉપરજ આવે છે. માટે ગુણાકારમાં (ભાજ્યમાં) જેટલાં મીડાં હોય તેટલાં મીડાં ગુણ્યમાં (ભાજકમાં) હોય તો ગુણકરમાં (ભાગાકારમાં) મીડું હોય નહીં. એટલે તે સંખ્યામાંથી મીડું બાદ કરતાં બાકી રહેશે તે ભાગાકાર આવશે. આ ઉપરથી ઉપરનું કારણ સમજાશે.

જે સંખ્યાને છેડે એકમ બેકી હોય અથવા શુન્ય હોય તે સંખ્યાને બેએ નિ:શેષ ભાગી શકાશે કારણ કે દશક, શતક, ઇત્યાદી અંકોને બેએ નિ:શેષ ભગાય છે; ને જો એકમને બેએ નિ:શેષ ભગાય તો તે આખી સંખ્યાને બેએ નિ:શેષ ભાગી શકાશે. ને બેકી એકમને બે નિ:શેષ ભાગી શકે છે, માટે આખી સંખ્યાનો બે નિ:શેષ ભાજક થશે.

કોઇ સંખ્યાના દશકને એકમના અંકોને ચાર અને પચીશ નિ:શેષ ભાગી શકે તો તે આખી સંખ્યાને પણ નિ:શેષ ભાગી શકશે. કેમકે ચાર અને પચીશ એ સો, હજાર, દશહજાર, એ અંકોને તો નિ:શેષ ભાગેછેજ એટલે જો તે સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક (દશક ને એકમ) ને ચાર અને પચીશ નિ:શેષ ભાગી શકતા હોય તો તે આખી સંખ્યાના પણ નિ:શેષ ભાજક થશે.

કોઈ સંખ્યાનો એકમ પાંચ હોય અથવા એકમની જગ્યોએ શૂન્ય હોય તો તે સંખ્યાનો પાંચ એ નિઃશેષ ભાજક થશે. કેમકે પાંચ એ દશક, શતક ઈત્યાદિને તો નિઃશેષ ભાગે છેજ.

કોઇ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકોને આઠ અમે એકસો પચીશ નિઃશેષ ભાગી શકશે, તો તે આખી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે. કેમકે હજાર, દશહજાર ઇત્યાદિ અંકોને તો આઠ અને એકસો પચીશ નિઃશેષ ભાગે છેજ.

કોઇ સંખ્યાના બધા અંકોના સરવાળાને ત્રણે અથવા નવે‡ નિઃશેષ ભાગાતા હોય તો તે આખી સંખ્યાને પણ ત્રણે અથવા નવે નિઃશેષ ભગાશે. કારણ કે કોઇ એકમને ત્રણે અથવા નવે ભાગતાં જેટલા શેષ વધે, તેટલાજ તેના ઉપર ગમે તેટલાં મીડાં ચઢાવીને ભાગતાં પણ વધશે. ૪ ને ત્રણે ભાગતાં એક વધેછે, તો ૪૦ ૪૦૦ ઇત્યાદિને ભાગતાં પણ એક વધશે. પાંચને ભાગતાં બે વધેછે તો ૫૦ ને ૫૦૦ ને ભાગતાં પણ બેજ વધવાના. ચારને ત્રણે ભાગતાં એક વધેછે, તો ૪૧ ને ભાગતાં બે વધશે ને ૪૨ ને ભાગતાં શૂન્ય વધશે; કેમકે ચારને ભાગતાં એક વધેછે તેમ બેને ભાગતાં એક ખૂટેછે. તે

---

‡ નવના એ ગુણને લીધે કોઈ સંખ્યાના અંકોના સરવાળાને નવે ભાગતાં જેટલા વધે તેટલા તે સંખ્યામાંથી બાદ કરવાથી નવે નિઃશેષ ભગાશે, અથવા તે વધારામાં નવ કે નવના અમુક ગણા બાદ કરી નવે ભાગવાથી પણ નિઃશેષ ભગાશે. તેમજ તે સંખ્યામાંથી તે સંખ્યાના અંકોને ગમે તેમ ફેરવ્યાથી જે સંખ્યા થાય તે બાદ કરે તો તે બાદબાકીને પણ નવે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

મજ પાંચને ત્રણે ભાગતાં બે વધે છે, તો ૫૦૧ ને ભાગતાં કાંઇ નહીં વધે, કેમકે પાંચને ભાગતાં બે વધ્યા તેમ પાંચસોને ભાગતાં પણ બે વધશે ને એકને ભાગતાં બે ખૂટશે, એટલે બરાબર થઇ રહેશે. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઈ સંખ્યાના અંકોના સરવાળાને ત્રણે નિઃશેષ ભગાશે, તો તે આખી સંખ્યાને પણ ભાગી શકાશે. ત્રણના ઉપરથી નવનું કારણ પણ સમજાશે, કેમકે જે ત્રણનું કારણ છે તેજ નવનું કારણ છે.

જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે તે સંખ્યાનો એકમ બેકી હોય તો તેને છએ પણ નિઃશેષ ભાગી શકાશે, કેમકે છેવટ એકીવાળી જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે, તે સંખ્યાના બમણાને ત્રણથી બમણા છ પણ નિઃશેષ ભાગી શકે એ દેખીતું છે, ને એકી એકમવાળી સંખ્યાને બમણી કરવાથી બેકી એકમવાળી સંખ્યા થશે તેથી ઉપલો નિયમ નીકળ્યો છે.

કોઇ સંખ્યાના એકી સ્થળોના અંકોના સરવાળો બેકી સ્થળોના અંકોના સરવાળા બરોબર હોય અથવા એ બે સરવાળાના અંતરને અગીઆરે નિઃશેષ ભગાતા હોય તો તે આખી સંખ્યાને અગીઆરે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

કારણ—આ નિયમનું કારણ ત્રણ ને નવના કારણને મળતુંજ છે. એકમ, શતક, દશ હજાર ઇત્યાદિ એકી સ્થળો અને દશક, હજાર, લાખ એ બેકી સ્થળો છે.

કોઇ દશકને અગીઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટે છે તેટલાજ તેટલા શતકને ભાગતાં વધે છે, જેમકે બે દશક ૨૦ ને અગીઆરે ભાગતાં બે ખૂટે ત્યારે ૨૦૦ ને અગીઆરે ભાગતાં બે વધે એટલે ૨૨૦ ને

અગીઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. તેમજ જેટલા હજારને અગીઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટેછે તેટલાજ તેટલા દશ હજારને ભાગતાં વધે છે. જેમકે ૧૦૦૦ ને અગીઆરે ભાગતાં એક ખૂટે ત્યારે ૧૦૦૦૦ ને અગીઆરે ભાગતાં એક વધે એટલે ૧૧૨૨૦ ને અગીઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. ને દશક, હજાર ઈત્યાદિ એકી સ્થળોને સો, દશ હજાર ઈત્યાદિ બેકી સ્થળો છે માટે, એકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં જેટલી વધ થાય છે તેટલી બેકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં ઘટ જાય છે, તેથી બરાબર થઇ રહે છે. જેમકે ૪૭૬૭૪ આ સંખ્યાગાં ૪૦૦૦૦+૬૦૦+૪ એ દરેક એકી સ્થળોને અગીઆરે ભાગતાં ચૌદ વધેછે ત્યારે ૭૦૦૦+૭૦ એ દરેક બેકી સ્થળને અગીઆરે ભાગતાં ચૌદ ઘટે છે તેથી બરાબર થઇ રહે છે. માટે એ આખી સંખ્યાને અગીઆર નિઃશેષ ભાગી શકશે અને એજ ઉપરથી ઉપલો નિયમ નીકળેલોછે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય.

બે અથવા વધારે સંખ્યાઓનો નાનામાં નાનો સાધારણ ભાજ્ય તે, તે સંખ્યાઓનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહેવાય. જેમકે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ આ સંખ્યાઓનો રીત પ્રમાણે ગણવાથી ૧૨૬૦ લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આવશે.

૨	૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨
૨	૯, ૧૪, ૧૫, ૨૧
૩	૯, ૭, ૧૫, ૨૧
૭	૩, ૭, ૫, ૭
	૩, ૧, ૫, ૧

આમાં ૨, ૨, ૩, ૭, ૩, ૫ એ અવયવો-

નો ગુણાકાર કરવાથી ૧૨૬૦ આવશે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાની રીતનું કારણ.

૧૮=૨×૩×૩, ૨૮=૨×૨×૭, ૩૦=૨×૩×૫ ને ૪૨=૨×૩×૭ એ અવયવોથી થએલી છે. તે ઉપરથી માલમ પડે છે કે ૧૮ ને ૨૮ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૨×૨×૨×૩×૩×૭ થી થવો જોઇએ; અને એ અવયવો વડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮ અને ૨×૨×૭ અથવા ૨૮ છે તેથી ૧૮ ને ૨૮ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, ૨×૨×૩×૩×૭ એ સાધારણ અવયવોથીજ થવો જોઇએ. કેમકે એ અવયવો વડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮, ૨×૨×૭ અથવા ૨૮ થયા છે અને ૨×૩×૫ એ ૩૦ ના અવયવ છે તેથી ૨×૨×૩×૩×૭×૫=૧૮, ૨૮ ને ૩૦ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય થશે અને ૨×૩×૭ એ ૪૨ ના અવયવ છે માટે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૨×૨×૩×૩×૭×૫ એજ સાધારણ અવયવોથી થવો જોઇએ કેમકે એ અવયવો વડેજ ૨×૩×૩ અથવા ૧૮, ૨×૨×૭ અથવા ૨૮, ૨×૩×૫ અથવા ૩૦ ને ૨×૩×૭ અથવા ૪૨ છે તેથી ૨×૨×૩×૩×૭×૫ એ ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ ના લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યના અવયવો છે માટે તેમનો ગુણાકાર ૧૨૬૦ એજ એ ચારે સંખ્યાનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય છે.

બે રકમોનો દૃઢભાજક અને તેજ બે રકમોનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આપેલો હોય, અને એ બેમાંથી એક રકમ આપી હોય, તો બીજી રકમ કાહાડવાનું.—

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય અને દૃઢભાજકનો ગુણાકાર કરી આ-

પેલી એક સંખ્યાએ ભાગ્યેથી બીજી સંખ્યા નીકળશે કેમકે-દૃઢભાજક એ બંને સંખ્યાનો મોટામાં મોટો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક હોવાથી તે બે સંખ્યાના ગુણાકાર કરતાં લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, દૃઢભાજક ગણો ઓછો આવશે. માટે આપેલા લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યને દૃઢભાજક ગણા કરવાથી તે બે સંખ્યાનો ગુણાકાર આવશે. એટલે જવાબ સંખ્યા×આપેલી સંખ્યા=દૃઢભાજક×લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય થયો. માટે જવાબ=(દૃઢભાજક×લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય)÷આપેલી સંખ્યા. જેમકે બે રકમોનો દૃઢભાજક ૩ અને લઘુ. સા. ભાજ્ય ૬૦ ને બેમાંની એક સંખ્યા ૧૫ છે તો બીજી સંખ્યા કેટલી? તો—૬૦×૩=૧૮૦ એ બે સંખ્યાનો ગુણાકાર, માટે ૧૮૦÷૧૫=૧૨ એ જવાબ.

તાળો–૧૨ ને ૧૫, નો દૃઢભાજક ૩ છે, ને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૬૦ છે.

```
૧૨)૧૫(૧              ૩|૧૨ - ૧૫
   ૧૨                  ૪ × ૫×૩=૬૦ આમાં ૬૦ એ,
  ────
   ૩)૧૨(૪   સંખ્યાના ગુણાકાર ૧૮૦ થી દૃઢભાજક ૩
     ૧૨     ગણા ઓછા છે, કેમકે ત્રણે ૧૨ ને ૧૫
     ──     બંનેને ભાગેલાછે.
      ૦
```

અપૂર્ણાંકોનો દૃઢભાજક અને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાનું.–

દૃઢભાજક—કોઈપણ બે અપૂર્ણાંકોનો દૃઢભાજક કહાડવો હોય તો અંશે અંશનો અને છેદે છેદનો દૃઢભાજક કહાડી, અંશનો દૃઢભાજક અંશ સ્થળે અને છેદનો દૃઢભાજક છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે $\frac{૨૫}{૪}$ અને $\frac{૧૫}{૮}$ નો દૃઢભાજક કહાડવો હોય તો ૨૫ અને ૧૫ એ અંશને

દૃઢભાજક, ૫ એ અંશ સ્થળે, અને ૪ ને ૬ એ છેદોનો દૃઢભાજક ૨ છેદ સ્થળે લખવાથી $\frac{૫}{૨}$ એ જવાબ. એવું કારણ ઉઘાડુંજ છે. પરંતુ જે અપૂર્ણાંકોના અંશોનો દૃઢભાજક એક હોય એટલે અંશો અરસ્પરસ અવિભાજ્ય હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કર્યા પછી ઉપરની રીતે અંશ અને છેદનો દૃઢભાજક કાહાડવો. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ ને $\frac{૫}{૬}$ નો દૃઢભાજક કાહાડવો હોયતો સમચ્છેદ કર્યાથી $\frac{૯}{૧૨}$ ને $\frac{૧૦}{૧૨}$ આવ્યા તેનો ઉપરની રીતે દૃઢભાજક કહાડવાથી $\frac{૧}{૧૨}$ આવ્યા એ જવાબ.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય—અપૂર્ણાંકના લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કર્યા પછી અંશે અંશનો અને છેદે છેદનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો. અંશને અંશ સ્થળે, અને છેદને છેદ સ્થળે લખવા, જેમકે $\frac{૩}{૪}$ અને $\frac{૫}{૬}$ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો સમચ્છેદ કર્યાથી $\frac{૯}{૧૨}$ ને $\frac{૧૦}{૧૨}$ આવ્યા પછી અંશનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૯૦ અને છેદનો ૧૨ આવ્યો એટલે $\frac{૯૦}{૧૨}$ અથવા $\frac{૧૫}{૨}$ એ જવાબ.

આણુપાણના અપૂર્ણાંક.

આણુપાણના ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવે તો તે શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરીએ છીએ તેનું કારણ.—સાદા ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવતો નથી, તેથી શેષમાં આગલો અંક ઉમેરવાને દશે ગુણ્યા વગર આગલો અંક ચઢાવીએ છીએ તો પણ ચાલેછે, પણ જ્યારે શેષમાં પાણો હોય ત્યારે આગલો અંક ઉમેરવાને તે પાણો વાળા શેષને તે ઉમેરવાના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણવા જોઇએ કેમકે શેષનું અંકસ્થાન ઉમેરવાના અંકસ્થાન કરતાં દશગણું વધારે હોયછે—આ કારણ

પાછળ ભાગાકારના કારણમાં પણ સમજાવી ગયા છીએ.

આણપાણના ભાગાકારમાં કોઇવાર દશે કે તેથી વધારે એ ભાગ ચલાવવો પડેછે, ને સાદા ભાગાકારમાં તેમ કરવું પડતું નથી, તેનું કારણ—સાદા ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે અંકે ભાગ કહાડયાથી જે શેષ વધેછે તે ભાજક કરતાં ઓછામાં ઓછો એક ઓછા જેટલો હોયછે, ને આગલા ઉમેરવાના અંકની કીમત તેની પહેલાના સ્થાનના અંક જેટલી હોતી નથી. તેથી શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરવાથી પણ દશે ભાગ ચાલી શકતો નથી, પણ આણપાણના ભાગાકારમાં તો ભાજ્યની સંખ્યા માંડવામાં દરેક અંકસ્થાનમાં આખા અંક લખાયછે ને પાણો લખાતી નથી, તેથી કોઇવાર આગલા અંકમાંથી શેષના સ્થાનમાં પાણો આવી શકતી હોય, ને તે પાણો હોવાથી વધારે ભાગાકાર નીકળતા હોય તો ભાજ્યમાં પાણો નહીં મૂકવાના કારણથી આગલો ભાગ દશે કે તેથી વધારે અંકે કહાડવો પડશે. દાખલો લીધાથી આ કારણ જલદી સમજાશે. જેમકે.

```
૧૨।|૭૩૬॥ (૫
    |૬૧।    ૧૦
    ------  ----
     ૧૧॥।   ૬૦
     ૧૦
    ------
    ૧૧૭॥
       ૬॥
    ------
     ૧૨૪
     ૧૨૨॥
    ------
        ૧॥
```

આમાં બીજો ભાગ દશે કહાડવો પડયો, કેમકે પાંચે ભાગ કહાડયો ત્યારે ૭૩ માંથી ૬૧। જતાં ૧૧॥। વધ્યા, પણ ૭૩ને બદલે ૭૩॥ હોત તો ૬ એજ ભાગ જાત, અને ૭ એકમમાં અરધો દશક રહેલોછે એટલે ખરેખરી એ સંખ્યા ૭૩॥ દશક અને ૧॥ એકમ છે તેથી ૭ એ ભાગ જવોજ જોઇએ પરંતુ આણપાણના ભાગાકારમાંપણ ભાજ્યની વચમાં પાણો મૂકવાનો

આપણામાં રીવાજ નથી, તેથી જે ભાગ છએ જવો જોઇતો હતો તે પાંચે કહાડ્યાથી એકમ સ્થાને દશે ભાગ કહાડવો પડ્યો છે.

વ્યવહારી અપૂર્ણાંક.

ભાગાનુબંધપૂર્ણાંક ને વિષમ અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની રીતનું કારણ–પૂર્ણાંકને અપૂર્ણાંકના છેદે ગુણી અંશ ઉમેરવા, ને તેને અંશસ્થાને લખી તે અપૂર્ણાંકના છેદને છેદ સ્થળે લખવા. જેમકે $૩\frac{૩}{૪}=\frac{૩\times૪+૩}{૪}=\frac{૧૫}{૪}$ કેમકે $૩\frac{૩}{૪}$ એટલે ત્રણ આખા ને ત્રણ પાવલાં મળીને એ અપૂર્ણાંક થયેલો છે. હવે ત્રણ આખાના પાવલાં કરીએ તો બાર થાય, ને ત્રણ પાવલાં હતાં તે સાથે કુલ ૧૫ પાવલાં અથવા $\frac{૧૫}{૪}$ થયા.

વિષમ અપૂર્ણાંકને ભાગાનુંબંધપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવું હોય તો અંશને છેદે ભાગી ભાગાકાર આવે તે પૂર્ણાંક ને શેષ વધે તે અંશમાં લખી છેદને છેદમાં લખવા. જેમકે $\frac{૧૫}{૪}$ અથવા ૧૫ ચોથા ભાગ છે તેમાંથી ૩ આખા ને ૩ ચોથા ભાગ નીકળ્યા એટલે $૩\frac{૩}{૪}$ જવાબ. આનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે.

કોઇ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ગુણવાની રીત ને કારણ–અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ગુણી અંશસ્થાને લખી જે છેદ હોય તે છેદ સ્થાને લખવો, અથવા જો છેદને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય તો ભાગી જે ભાગાકાર આવે તેને છેદમાં ને અપૂર્ણાંકના અંશને અંશસ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૩}{૮}$ ને બેએ ગુણવા હોય તો $\frac{૩}{૮}\times૨=\frac{૩\times૨}{૮}=\frac{૬}{૮}$ અથવા $\frac{૩}{૮\div૨}=\frac{૩}{૪}$ એ જવાબ. કારણ કે $\frac{૩}{૮}$ એ કોઈ વસ્તુના આઠ ભાગ કરીએ તેમાંથી ત્રણ ભાગ લઇએ તેની બરાબ-

૨ છે અને એવા ૭ ભાગ લઈએ તો ત્રણ ભાગ કરતાં તે બમ- ણા થાય એ દેખીતું છે. અથવા કોઈ વસ્તુના ચાર ભાગ કરી તે- માંના ત્રણ ભાગ લઈએ તે, તેજ વસ્તુના આઠ ભાગ કરી તેમાંના ત્રણ ભાગ લઇએ તે કરતાં બમણાજ થશે કેમકે લીધેલા ભાગની સં- ખ્યા સરખી છે, પણ બીજીવારના ભાગમાંના દરેક કરતાં પહેલી વારમાંનો દરેક ભાગ બમણો મોટો છે.

કોઇ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ભાગવાની રીત ને કારણ- અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય તો ભાગી અંશમાં ને આ- પેલા છેદને છેદમાં લખવો અથવા અપૂર્ણાંકના છેદને પૂર્ણાંકે ગુણી તેને છેદમાં અને આપેલા અંશને અંશમાં લખવો એ જવાબ. જે- મકે $\frac{૬}{૮}$ ને બેએ ભાગવા હોય તો $\frac{૬ \div ૨}{૮} = \frac{૩}{૮}$ અથવા $\frac{૬}{૮ \times ૨} = \frac{૬}{૧૬}$ કા- રણ કે $\frac{૬}{૮}$ એટલે એક વસ્તુના આઠ સરખા ભાગમાંના ૭ ભાગ છે તેના બે ભાગ કરવા હોય તો દરેક ભાગ ત્રણ આઠમા ભાગનો આવશે. એટલે $\frac{૩}{૮}$ આવશે અથવા તે વસ્તુના આઠ ભાગ છે. તે દરેક ભાગના બબે ભાગ એટલે કૂલ ૧૬ ભાગ કર્યા તો એમાંના દરેક ભાગ તે આઠમા ભાગમાંના દરેક ભાગ કરતાં અરધો થશે. માટે આઠ ભાગમાંના ૭ ભાગ કરતાં સોળ ભાગમાંના ૭ ભાગ અ- રધા થશે.

કોઇ અપૂર્ણાંકના અંશને અને છેદને કોઇ રકમે ગુણી- એ અથવા ભાગીએ તો તેની કીમતમાં ફેર પડશે નહીં તેનું કારણ—ઉપરના કારણ પ્રમાણે કોઇ અપૂર્ણાંકના અંશને કોઇ સંખ્યાએ ગુણીએ તો તેટલા ગણી તે અપૂર્ણાંકની કીમત વધે છે, અને તેજ અપૂર્ણાંકના છેદને જો તેજ સંખ્યાએ ગુણીએ તો તે અ-

પૂર્ણાંકની તેટલા ગણી કીમત ઘટે છે. એટલે અંશને કોઇ રકમે ગુણવાથી જેટલા ગણી કીમત વધે તેટલાજ ગણી કીમત છેદને તેજ રકમે ગુણવાથી ઘટે; તેથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી. તેમજ કોઇ અપૂર્ણાંકના અંશને કોઈ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી કિંમત ઘટે છે. અને તે અપૂર્ણાંકના છેદને તેજ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી કીમત વધેછે, એટલે અંશને કોઇ રકમે ભાગવાથી જેટલા ગણી કીમત ઘટે. તેટલાજ ગણી કીમત છેદને તે રકમે ભાગવાથી વધે છે, તેથી તે અપૂર્ણાંકની કીમતમાં ફેર પડતો નથી.

ઉપરનાજ કારણને લીધે અપૂર્ણાંકોનો અતિસંક્ષેપ કરવાથી પણ કિંમતમાં ફેર પડતો નથી કેમકે અતિસંક્ષેપમાં અંશ અને છેદ બંનેને એકજ રકમે ભાગવી પડેછે.

પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકમાં જેટલા અપૂર્ણાંક હોય, તેમના અંશોનો ગુણાકાર અંશ સ્થળે અને છેદોનો ગુણાકાર છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે $\frac{૨}{૩}$ના $\frac{૩}{૪}=\frac{૨\times૩}{૩\times૪}=\frac{૬}{૧૨}$ કારણ કે ઉપર કહ્યા પ્રમાણે $\frac{૨}{૩}$નો $\frac{૧}{૪}$ અથવા ચોથો ભાગ $\frac{૨}{૧૨}$ થાય, એવા ૩ ભાગ અથવા ૩ ગણા લઇએ તો $\frac{૬}{૧૨}$ આવે.

મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં અંશ સ્થળના અપૂર્ણાંકના અંશ, ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદનો ગુણાકાર અંશમાં, ને અંશસ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદ ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના અંશ એ બેનો ગુણાકાર છેદમાં લખવાથી સાદું અપૂર્ણાંક આવે છે. જેમ. $\frac{\frac{૨}{૩}}{\frac{૩}{૪}}=\frac{૨\times૪}{૩\times૩}=\frac{૮}{૯}$ જવાબ.

કારણ કે— ઉપર કહ્યા પ્રમાણે અંશ અને છેદ બંનેને ચારે

ગુણ્યા તો $\frac{\frac{૨}{૩}}{\frac{૩}{૪}}$=અંશને×૪=$\frac{૨×૪}{૩}$ અને $\frac{૩}{૪}$ છેદને×૪=$\frac{૩×૪}{૪}$=૩ એટલે $\frac{\frac{૨×૪}{૩}}{૩}$ હવે ફરીને $\frac{૨×૪}{૩}$ એ અંશને, અને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો $\frac{૨×૪}{૩}÷૩=\frac{૨×૪}{૩×૩}$ અથવા $\frac{૮}{૯}$ આવ્યા ને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો ૧ આવ્યો. પણ છેદમાં ૧ મૂકવાથી કે નહિ મૂકવાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી. માટે $\frac{૮}{૯}$ એ જવાબ.

અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કરવાની રીત ને કારણ.

કેટલાક અપૂર્ણાંકોનો લઘુતમ સમચ્છેદ કરવો હોય તો, તેમના છેદનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો. એ બધા અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ થશે, એ સમચ્છેદને દરેક અપૂર્ણાંકના છેદે ભાગી, અંશે ગુણી તે ગુણાકાર દરેકના અંશ સ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૫}{૭}, \frac{૭}{૨૮}, \frac{૩}{૧૪}$ એનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય ૨૮ છે. તેને દરેક અપૂર્ણાંકના છેદમાં લખી એ છેદને સાતે ભાગી ૫ એ ગુણ્યા તો ૨૦, ૨૮ એ ભાગીને સાતે ગુણ્યા તો સાત, ને ચૌદે ભાગી ત્રણે ગુણ્યા તો ૬ આવ્યા. એટલે $\frac{૨૦}{૨૮}, \frac{૭}{૨૮}, \frac{૬}{૨૮}$ એ સમચ્છેદ થયો. એની કીમતમાં અને મૂળ અપૂર્ણાંકોની કીમતમાં ફેર પડતો નથી. કેમકે મૂળ અપૂર્ણાંકના અંશ કરતાં સમચ્છેદનો અંશ જેટલા ગણો વધેછે, તેટલાજ ગણો છેદ પણ વધે છે, ને છેદને અને અંશને કોઇ એકજ રકમે ગુણવાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી, એ ઉપર આવી ગયું છે.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવાની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે તે અપૂર્ણાંકોનો સમચ્છેદ કરીને અંશોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરીએ છીએ ને સમચ્છેદની સંખ્યા છેદમાં લખીએ છીએ. પણ છેદનો સર્વાળો

કે બાદબાકી કરતા નથી, કેમકે સર્વાળો કે બાદબાકી સજાતિય પદની સરખા મહત્વની રકમોની થાય. રૂ. ૪–૨ આના એ નાણાની સજાતિય રકમો છે, પરંતુ સરખા મહત્વની નથી. તેથી એનો સર્વાળો ૬ રૂપિઆ કે છ આના થતો નથી, તેમજ $\frac{૩}{૧૬}$, અને $\frac{૫}{૮}$ રૂપિઆનો સર્વાળો $\frac{૩}{૧૬}+\frac{૧૦}{૧૬}=\frac{૧૩}{૧૬}$ થાય પણ $\frac{૮}{૧૬}$ કે $\frac{૮}{૮}$ ન થાય. $\frac{૩}{૧૬}$ એટલે એક રૂપિઆના સોળ ભાગમાંના ત્રણ ભાગ અથવા ત્રણ. આનામાં $\frac{૫}{૮}$ એટલે એક રૂપિઆના આઠ ભાગમાંના પાંચ ભાગ અગર પાંચ બે આનીઓ ઉમેરવી હોય તો ૮ બેઆની કે ૮ આના ન થાય, માટે ૧ રૂપિઆના આઠમા ભાગ, અથવા બે આની છે, તેના સોળમા ભાગ અથવા આના કરવાને સમચ્છેદ કર્યો તો પાંચ બે આનીના દશ આના થયા. તેમાં ત્રણ આના ઉમેર્યા તો તેર આના અથવા એક રૂપિઆના ૧૩ સોળમા ભાગ$=\frac{૧૩}{૧૬}$ થયા. બાદબાકીનું પણ એજ કારણ છે, ને અપૂર્ણાંકોના સર્વાળામાં છેદનો સર્વાળો કરતા નથી, કેમકે છેદ તો માત્ર આખી કીમતના કેટલા ભાગ કરેલા છે, તેજ બતાવે છે, પણ તે અપૂર્ણાંકની કીમત તો તે ભાગમાંના કેટલા ભાગ લીધા છે, તે ઉપર એટલે અંશ ઉપર આધાર રાખે છે, તેથી અંશોનોજ સર્વાળો થાય છે, જેમકે ઉપલાજ દાખલામાં $\frac{૩}{૧૬}$ અથવા ૩ સોળમા ભાગને દશ સોળમા ભાગ અથવા $\frac{૧૦}{૧૬}$ નો સર્વાળો, તેર સોળમા ભાગ અથવા $\frac{૧૩}{૧૬}$ થાય પણ $\frac{૧૩}{૩૨}$ કે ૧૩ બત્રીશમા ભાગ નહિ થાય.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ગુણાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર કરવો હોય તો અંશે અંશનો

અને છેદે છેદનો ગુણાકાર કરવો, કેમકે અપૂર્ણાંકને અપૂર્ણાંકે ગુણવા, એટલે એક અપૂર્ણાંકનો બીજા અપૂર્ણાંક જેટલો ભાગ લેવો એવો અર્થ છે. પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકમાં પણ એજ પ્રમાણે હોય છે, એટલે પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકમાં, અને અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં ફેર નથી, તેથી પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકને સાદા અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની જે રીત અને કારણ કહ્યું, તેજ રીત અને કારણ અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં પણ છે, જેમકે $\frac{૨}{૩}$ના $\frac{૩}{૪}$ એ પ્રભાગજાતિ અપૂર્ણાંકને $\frac{૨}{૩}\times\frac{૩}{૪}$ એ સરખાંજ છે, બંનેમાં $\frac{૬}{૧૨}$ જવાબ આવશે, પણ બંનેમાં સંક્ષેપ ઉરાડવો જોઇએ, એટલે ગુણાકારનું ટુંકું રૂપ કરવું જોઇએ. તેથી $\frac{૬}{૧૨}$ નું ટુંકું રૂપ કે સંક્ષેપ $\frac{૧}{૨}$ આવશે. કેમકે $\frac{૬}{૧૨}$ ને $\frac{૧}{૨}$ ની કીંમતમાં ફેર નથી, કારણ કે અંશને છેદ બંનેને છ એ ભાગેલા છે.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ભાગાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ભાગાકાર કરવો હોય તો જે અપૂર્ણાંક ભાજક હોય, તેના અંશે ભાજ્ય અપૂર્ણાંકના છેદને, અને છેદે અંશને ગુણવા. અથવા ભાજક અપૂર્ણાંકના અંશને છેદ સ્થળે, ને છેદને અંશસ્થળે લખીને તેનો ભાજ્ય અપૂર્ણાંક સાથે ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. જેમકે $\frac{૧}{૨}\div\frac{૩}{૪}=\frac{૧}{૨}\times\frac{૪}{૩}=\frac{૪}{૬}=\frac{૨}{૩}$ આ જવાબ. કારણ કે પાછળ આવી ગયું કે. ભાજક જે પ્રમાણે ઘટે, તે પ્રમાણે ભાગાકાર વધારે આવે, ને ભાજક વધે તેમ ભાગાકાર ઘટે, હવે $\frac{૧}{૨}$ ને $\frac{૩}{૪}$ એ ભાગવા એટલે $\frac{૧}{૨}$ ના ૪ ગણા કરવા. કેમકે ભાજક ૧ હોય તો ભાગાકાર $\frac{૧}{૨}$ આવે, પણ ભાજક ૪ ગણો ઓછો છે,

માટે ભાગાકાર ૪ ગણો વધારે આવવો જોઈએ. એટલે $\frac{૧}{૨} \div \frac{૧}{૪} = \frac{૧}{૨} \times ૪ = \frac{૪}{૨}$ આવે. હવે ભાજક $\frac{૧}{૪}$ ને બદલે ત્રગણો, અથવા $\frac{૩}{૪}$ લઇએ, તો ભાગાકાર $\frac{૪}{૨}$ થી ત્રણગણો ઓછો આવવો જોઇએ, એટલે $\frac{૪}{૨} \div ૩ = \frac{૪}{૬}$ અથવા $\frac{૨}{૩}$ આવે. આથી સમજાશે કે $\frac{૧}{૨} \div \frac{૩}{૪} = \frac{૧}{૨} \times \frac{૪}{૩} = \frac{૪}{૬} = \frac{૨}{૩}$ શાથી આવ્યા. ભાજકને ઉલટાવીને ગુણવાની રીત આ ઉપરથી નીકળી છે.

દશાંશ અપુર્ણાંક.

દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં તે અપૂર્ણાંક ઉપર જમણી તરફ શૂન્ય વધારવાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી પણ તે અપૂર્ણાંકના અંકોની ડાબી તરફ શૂન્ય મુકવાથી દશગણી કીમત ઘટેછે તેનું કારણ—જમણી તરફ શૂન્ય વધારવાથી જેમ દશ ગણો અંશ વધેછે તેમ છેદ પણ દશ ગણો વધેછે, એટલે સંક્ષેપ કરવાથી તે અપૂર્ણાંકનું મુળ રૂપ આવી રહેછે, પણ ડાબી તરફ શૂન્ય વધારવાથી માત્ર છેદજ દશ ગણો વધેછે તેથી તેની મૂળ કીમત કરતાં દશ ગણી કીમત ઘટેછે. જેમકે. ૧ એક આની કીમત વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં $\frac{૧}{૧૦}$ છે હવે ૦૧ ઉપર જમણી તરફ શૂન્ય વધાર્યાથી ૦૧૦ થયા એને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો $\frac{૧૦}{૧૦૦}$ આવે તેનો સંક્ષેપ કર્યાથી $\frac{૧}{૧૦}$ અથવા ૦૧ આવી રહે છે, પણ ૦૧ ની પાછળ મૂક્યાથી ૦૦૧ આવશે તેને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો $\frac{૦૧}{૧૦૦}$ અથવા $\frac{૧}{૧૦૦}$ આવ્યા એટલે મૂળ છેદ કરતા છેદ દશ ગણો થયો ને અંશ એને એ રહ્યાથી કીમત દશ ગણી ઘટી.

દશાંશ સર્વાળાની રીત ને કારણ—દશાંશ સર્વાળામાં બધી સંખ્યા, દશાંશ ચિન્હ એક ઉભી સીધી લીટીમાં આવે તે રીતે મૂકી જમણા હાથ બાજુના ઉભી સીધી હારના અંકોનો સર્વાળો કરી તે-

માંની વદી તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકોના સર્વાળાગાં ઉમેરીએ છીએ. અને એજ રીતે બધા અંકોનો સર્વાળો કરીએ છીએ, કેમકે દશાંશ માંડવામાં દશાંશ ચિન્હ તે સંખ્યાગાં દશાંશ અપૂર્ણાંકના અંકોની હદ બતાવે છે. એ ચિન્હ પછીનો નજીકનો જમણા હાથ ભણીનો અંશ દશાંશનો, તેની પાસેનો જમણા હાથ ભણીનો શતાંશનો, તેની પાસેનો સહસ્ત્રાંશનો ને તેની પરોનો દશ સહસ્ત્રાંશનો છે. એ અંકો એક બીજા નીચે સજાતિય આવે માટે દશાંશ ચિન્હ ઉભી સીધી લીટીમાં આવે એ રીતે બધી સંખ્યા માંડીએ છીએ. દશાંશ સંખ્યાના અપૂર્ણાંકના અંકોની કીમત પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાની પેઠે જમણા હાથ ભણીના અંક કરતાં તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકની કીમત દશ ગણી વધારે છે. માટે જમણા હાથ ભણીના અંકોનો સર્વાળો કરી તેમાંની વદી તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના અંકોના સર્વાળામાં ઉમેરીએ છીએ. જેથી દશાંશ અંકોના સર્વાળામાંથી જે વદી આવે તે પૂર્ણાંક થાય માટે તેને પૂર્ણાંક એકમના સર્વાળામાં ઉમેરવામાં આવેછે. .૯ ને .૪ દશાંશનો સર્વાળો $\frac{૯}{૧૦}+\frac{૪}{૧૦}=\frac{૧૩}{૧૦}$ આવે એટલે ૧ પૂર્ણાંક ને .૩ થાય. સર્વાળામાં ચિન્હ દશાંશ અંકોના સરવાળાની ને પૂર્ણાંક અંકોના સર્વાળાની વચમાં આવે એ દેખીતું છે.

બાદબાકી પણ જમણા હાથ ભણીથી પૂર્ણાંક સંખ્યાની બાદબાકીની રીતેજ કરવી, ને ચિન્હ સર્વાળાની પેઠેજ મૂકવું એનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે.

દશાંશ ગુણાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ગુણાકાર સાદા ગુણાકારની પેઠે કરી ગુણ્યને ગુણકના દશાંશના જેટલા આંકડા હોય

તેટલા આંકડા ગુણાકારમાં કાપી ચિન્હ કરવાથી આવે છે. અને ગુણ્યને ગુણકના દશાંશ આંકડા જેટલા ગુણાકારમાં ન હોય તો ખૂટે તેટલાં મીડાં તે ગુણાકારની પાછળ મૂકવાથી આવેછે. એનું કારણ દાખલાથી જલદી સમજાશે. ·૧×·૧=$\frac{૧}{૧૦}\times\frac{૧}{૧૦}=\frac{૧}{૧૦૦}$ થાય છે. એને દશાંશનું રૂપ આપીએ તો ·૦૧ આવે તેમજ ૧·૧×૧·૧=$\frac{૧૧}{૧૦}\times\frac{૧૧}{૧૦}=\frac{૧૨૧}{૧૦૦}$ અથવા ૧$\frac{૨૧}{૧૦૦}$ આવે એને દશાંશમાં મૂકીએ તો ૧·૨૧ થાય તે ૧·૧×૧·૧ નો ગુણાકાર ૧·૨૧ આવે, કેમકે ૧૨૧ ગુણાકારમાંથી ગુણ્યને ગુણક બંનેના મળીને દશાંશ બે આંકડા છે તે કાપવામાં આવે. આ ઉપરથી રીત કેમ નીકળી તે સમજાશે.

દશાંશ ભાગાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ભાગાકારમાં સાદા ભાગાકારની પેઠે ભાગાકાર કરીને ભાજ્યમાં દશાંશના જેટલા આંકડા હોય તેમાંથી ભાજકના આંકડા બાદ કરી બાકી રહે તેટલા આંકડા. કાપી ભાગાકારમાં ચિન્હ મૂકવું પણ બાદબાકી કરતાં ભાગાકારમાં આંકડા ઓછા હોય તો જેટલા આંકડા ઓછા હોય તેટલાં ભાગાકારના અંકોની પાછળ મીડાં મૂકીને તેની પહેલાં ચિન્હ કરવું. પણ જો ભાજ્યના દશાંશ અંક કરતાં ભાજકના દશાંશ અંક વધારે હોય તો તેટલાં મીડાં ભાગાકારના અંક ઉપર જમણી તરફ વધારવાં. એ મીડાં સુધાંત આખી સંખ્યા પૂર્ણાંક આવશે. કારણ—

ભાગાકાર ને ભાજકનો ગુણાકાર તે ભાજ્ય થાય માટે ભાજક ને ભાગકારનાં દશાંશ સ્થળોના સર્વાળા જેટલાં ભાજ્યમાંનાં દશાંશ સ્થળ હોય, તેથી ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાંથી ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ બાદ કર્યાં તો બાકી રહ્યાં તેટલાં દશાંશ સ્થળ ભાગાકારમાં

આવવાં જોઈએ, અને તેજ કારણથી ભાગાકારમાં તેટલા આંકડા ન હોય તો ભાગાકારના આંકડાની પહેલાં ખૂટતાં મીડાં મૂકી દશાંશ આંકડા પુરા કરવામાં આવે છે. કેમકે દશાંશમાં પહેલાં મીડાં મૂકવાથી દશાંશ સ્થળ વધે છે ને છેલ્લાં મૂકવાથી વધતાં નથી કારણકે દશાંશમાં છેલ્લાં મીડાં વધાર્યાથી કીમતમાં ફેરફાર થતો નથી. પણ જો ભાજ્ય કરતાં ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ વધારે હોય તો ભાગાકારના અંક ઉપર તેટલાં મીડાં મૂકી તેને પુર્ણાંક ગણવામાં આવે છે. કેમકે તે પ્રમાણે કરવાથી ભાગાકારને ભાજકનો ગુણાકાર ભાજ્યના બરાબર આવી રહે છે. અથવા ભાજકનાં વધારાનાં દશાંશ સ્થળ જેટલાં ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાં મીડાં ચઢાવી ભાગ ચલાવ્યાથી પણ ભાગાકારમાં તેટલા પૂર્ણાંક આંકડા વધારે આવેછે. વળી જેમ ભાજક નાનો હોય તેમ ભાગાકાર મોટો આવવોજ જોઇએ, નહિ તો ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્યની બરાબર થાય નહિ.

કોઇ વ્યવહારી અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપવું હોય તો તે તે અપુર્ણાંકના અંશને છેદે દશાંશ ભાગાકારની રીતે ભાગવા પડે છે, કેમકે વ્યવહારી અપુર્ણાંકમાં છેદ એ અંશનો ભાજક છે.

પુનરાવર્ત્ત દશાંશ.

અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું.કારણ—કોઈ અપુર્ણાંકનો અતિ સંક્ષેપ કર્યા પછી જો છેદમાં બે, પાંચ કે તેમનો કોઈ ગુણાકાર કે તેમનો કોઇ ઘાત કે ઘાતોનો ગુણાકાર હોય તો તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન આવશે, કેમકે દશાંશ રીતે અંશને છેદે ભાગતાં ભાજ્યમાં

મીડાં લેઇ શેષ ઉપર ચઢાવીએ છીએ, એટલે છેદના દશગણા, સો ગણા ઇત્યાદિ કરીએ છીએ. અને કોઇપણ રકમના દશગણા, સો ગણા ઇત્યાદી કરવાંથી બે, પાંચ, તેમનો કોઈ ગુણાકાર કે તેમનો કોઇ ઘાત કે ઘાતોનો ગુણાકાર નિઃશેષ ભાગી શકે છે, તેથી તે દશાંશ અંતવાન આવે છે,

અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પુનરાવર્ત્ત દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કોઇ અપૂર્ણાંકનો અતિસંક્ષેપ કર્યા પછી જો તેના છેદમાં ૩, ૭, ૧૧, ૧૩, ૧૭ ઇત્યાદિ એને પાંચ સિવાયની કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય કે કોઇ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ઘાત કે, બે કે વધારે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર હોય તો તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પૂનરાવર્ત દશાંશ આવશે. કેમકે વ્યવહારી અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શેષ ઉપર ચઢાવવાનો અંક મીડુંજ હોય છે. મીડું ચઢાવ્યાથી તે અંક દશ ગણો થાય છે. પણ દશને કે દશના અમુક ગણાને અવિભાજ્ય સંખ્યા નિઃશેષ ભાગી શકતી નથી; અને શેષ ભાજક કરતાં ઓછો આવવો જોઇએ તથા એકવાર વધેલો અંક ફરીને વધવો ન જોઈએ; એટલે ભાજ્યના મૂળ અંક જેટલો શેષ વધે તે પછીના અંક, પહેલાં આવી ગયેલાજ આવવાના. કેમકે શેષ ઉપર પહેલાં ચઢાવેલાજ અંક (મીડું) ચઢાવવાના હોય છે અને તેથી ભાગાકારમાં પુનરાવર્ત્ત અંકની સંખ્યા પણ હમેશાં ભાજકના આંકડા કરતાં ઓછીજ હોવાની, કેમકે શેષમાં ભાજક કરતાં અંક ઓછો વધવાનો ને એકવાર વધેલો અંક ફરી વધવાનો નહિ તેથી વધારેમ વધારે ભાજક કરતાં એક ઓછો એટલા અંકમાંથી દરેક અંક શેષમાં એકવાર આવવાનો

એટલે ભાગાકાર પણ ભાજકના અંક કરતાં એક ઓછે એટલી વાર જવાનો. જેમકે છેદમાં સાત હોય તો શેષમાં વધારેમાં વધારે ૭ સુધીના દરેક અંક એકવાર આવવાના, તેથી ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે ૭ આંકડા આવવાના.

મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત ક્યારે આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કોઇ અપૂર્ણાંકના છેદમાં બે અથવા પાંચ કે તેમનો ગુણાકાર, કોઇ ઘાત કે ઘાતોના ગુણાકારનો ને કોઇ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ગુણાકાર હોય, એટલે ઉપર કહેલા અંતવાન દશાંશ આવે એવા ને શુદ્ધ પૂનરાવર્ત્ત દશાંશ આવે એવા અંકોનો ગુણાકાર હોય તો તે અપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપતાં મિશ્ર પૂનરાવર્ત્ત આવશે કેમકે શેષને હમેશાં દશ ગણા કરી ભાગાકાર કરવામાં આવેછે, ને એવી રકમને ઉપલા મિશ્ર ભાજકે ભાગવાથી મિશ્રપુનરાવર્ત્ત અંકોજ આવવા જોઇએ. કેમકે ભાજકના અવયવ પાડીએ તો બે, પાંચ અને બીજી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ આવશે, હવે બેએ કે પાંચે ભાગવાથી નિઃશેષ ભાગાકાર આવશે, ને એ ભાગાકારને અવિભાજ્ય સંખ્યાએ ભાગવાથી પહેલા અંક અંતવાન આવ્યા પછીજ પુનરાવર્ત્ત અંકો આવવાના. જેમકે $\frac{1}{6}$ ને દશાંશનું રૂપ આપતાં ૬ ના અવયવ ૨ ને ૩ પડ્યા ·૧ ને બેએ ભાગતાં ·૫ આવ્યા પણ તેને ત્રણે ભાગતાં મીડું ચઢાવ્યા વગરજ એક અંક આવ્યો માટે તે અંતવાન થવાનો ને મીડું ચઢાવ્યા પછીના આંકડા પુનરાવર્ત્ત આવવાના, કેમકે અવિભાજ્ય સંખ્યા ભાજકમાં હોય તો જ્યારે ભાજ્ય ભાજક કરતાં નાનો હોય ને તેને મીડું ચડાવી દશગણો કરીએ ત્યારેજ પુનરાવર્ત્ત દશાંશ આવે છે.

શુદ્ધ પુનરાવર્ત્ત દશાંશને વ્યવહારી અપુર્ણાંકમાં લાવવાની રીત ને કારણ—પુનરાવર્ત્ત અંકને અંશમાં લખીને અંકોની સંખ્યા જેટલા નવડા છેદમાં લખી અતિસંક્ષેપ જતો હોય તો કાહાડવો. કેમકે $\frac{૨}{૯}$ ના ·૨̇, $\frac{૨}{૯}$ અથવા $\frac{૩}{૯}$ ના ·૩̇ ઇત્યાદિ આવે છે, માટે પુનરાવર્ત્ત એક અંક હોય તો તેની નીચે નવડો મૂકી અતિસંક્ષેપ કર્યાથી વ્યવહારી અપૂર્ણાંક થશે. પણ જો અંશમાં બે આંકડા હોય તો બે નવડાએ ભાગ્યાથી તેજ બે અંક પુનરાવર્ત્ત આવેછે. જેમકે $\frac{૨૫}{૯૯}$ ને દશાંશનું રૂપ આપતાં ·૨̇૫̇ આવશે માટે ·૨̇૫̇ ને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપતા ૨૫ ના છેદમાં બે નવડા આવવા જોઈએ એજ પ્રમાણે અંશમાં જેટલા અંક હોય તેટલા નવડા છેદમાં મૂક્યાથી તે પુનરાવર્ત્ત દશાંશ આવી રહેછે.

મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત દશાંશને વ્યવહારી અપુર્ણાંકનું રૂપ આપવાનો રીત ને કારણ—તે અપૂર્ણાંકને જુદા રાખી, અપૂર્ણાંકને આખી સંખ્યા ગણી તેમાંથી જેટલા અંતવાન આંકડા હોય તેટલા બાદ કરવા, બાકી રહે તે અંશમાં લખી છેદમાં જેટલા પુનરાવર્ત્ત આંકડા હોય તેટલા નવડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં તે નવડા ઉપર મીડાં ચઢાવવાં. પછી તેને પૂર્ણાંક સાથે મૂકવા; એ આખું ભાગાનુબંધ અપૂર્ણાંક થશે, અથવા અપૂર્ણાંક સાથે આખી સંખ્યા ગણી તેમાંથી પુનરાવર્ત્ત સિવાયના અંક બાદ કરી બાકી રહે તે અંશમાં લખવા. ને છેદમાં પુનરાવર્ત્ત આંકડા જેટલા નવડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં મીડાં તે નવડા ઉપર ચડાવવાં. જેમકે ૧·૪૩̇–૧૪=$\frac{૧૨૯}{૯૦}$=$\frac{૪૩}{૩૦}$ અથવા ૧$\frac{૧૩}{૩૦}$ આવશે. કારણ કે મિશ્ર પુનરાવર્ત્ત દશાંશ એ અંતવાન અને પુનરાવર્ત્તનો સરવાળો છે. અંતવાન દશાંશના

છેદમાં દશ અને પુનરાવર્ત્તના છેદમાં ઉપર કહ્યા પ્રમાણે નવ છે. એ બેનો સરવાળો વ્યવહારીમાં કરવાને સમચ્છેદ કરવો જોઇએ એટલે અંતવાન દશાંશને નવે અને પુનરાવર્ત્તને દશે ગુણવા પડશે, પછી સર્વાળો કરીશું. તો આખી રકમમાંથી અંતવાન બાદ કર્યા જેટલા આવશે કેમકે અંતવાનને ૧૦−૧=૯ ગુણ્યા છે. જેમકે $\cdot ૪૩=\frac{૪}{૧૦}+\frac{૩}{૯૦}=\frac{૩૬+૩}{૯૦}=\frac{૩૯}{૯૦}$ અથવા $૪૩=\frac{૪૩-૪}{૯૦}=\frac{૩૯}{૯૦}=\frac{૧૩}{૩૦}$ આવે, આ ઉપરથી ઉપરનો નિયમ નીકળ્યો છે.

પુનરાવર્ત્ત દશાંશના સર્વાળા. બાદબાકી, કરવાં હોય તો તેને ઉપર મુજબ વ્યવહારી અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપી સર્વાળો કે બાદબાકી કરી તેને ફરીથી દશાંશનું રૂપ આપવું. પણ અમૂક આંકડા ખરા લાવી દશાંશમાંજ સર્વાળો કે બાદબાકી કરવી હોય તો જેટલા આંકડા ખરા લાવવાના કહ્યા હોય તેટલા આંકડા પુનરાવર્ત્તના રાખી બાકીના આંકડા મૂકી દેવા ને મૂકી દીધેલા આંકડામાંથી વદી નીકળતી હોય તો તે રાખેલા આંકડામાં ઉમેરવી. તેથી માગેલા આંકડા ખરા આવશે. આ રીતનું કારણ ઉઘાડુંજ છે.

વાંકડીઆ ગુણાકારની રીત—એ ગુણાકારમાં દશાંશના અમુક આંકડા ખરા લાવવાનું કહેલું હોય માટે જેટલા આંકડા ખરા લાવવાના કહ્યા હોય તેટલા આંકડા ગુણ્યના દશાંશમાં ડાબા હાથ ભણીથી ગણીને તે નીચે ગુણકનો પૂર્ણાંકનો એકમ લખવો પછી તેની જમણી બાજુએ પૂર્ણાંક દશક, શતક ઇત્યાદિ લખવાને પૂર્ણાંકના એકમની ડાબી બાજુએ ગુણકનો દશાંશ, તેની ડાબી બાજુએ શતાંશ, ઇત્યાદિ આંકડા લખવા. એ રીતે આંકડા ફેરવ્યા પછી ગુણકના છેલ્લા આંકડા વડે તેની ઉપરના આંકડા-

થો જમણા આંકડા સાથે ગુણી તેની વદી પાંચથી ૧૪ સુધી એક, ૧૫થી ૨૪ સુધી ૨, ૨૫ થી ૩૪થી ત્રણ એ પ્રમાણે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથે ગુણી તેમાં ઉમેરવી. પછી ડાબા હાથ ભણીના આંકડા સાથે સાદા ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. પછી તેની પાસેના ડાબા હાથ ભણીના આંકડાએ તેની ઉપરના આંકડા પાસેના જમણા આંકડા સાથે ગુણી તેની વદી ઉપરની રીતે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથેના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. બાકીનો ગુણાકાર સાદા ગુણાકાર માફક ગણવો. એ પ્રમાણે બધા આંકડાનો ગુણાકાર કરી સરવાળો કરવો ને જેટલા આંકડા રાખવાના કહ્યા હોય તેટલા રાખી દશાંશ ચિન્હ મૂકવું.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં આંકડા ફેરવવા પડે છે તેનું કારણ—જો બે આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તો શતાંશના અંક ખરા લાવવા જોઈએ. હવે ગુણ્યનો શતાંશ અને ગુણકનો એકમ એ બેનો ગુણાકાર શતાંશ આવે તેમાં ગુણ્યના સહસ્રાંશ સાથે એકમે ગુણતાં ઉપરની રીતે વદી આવે તે ઉમેરીએ તો કસર જાય નહીં ને શતાંશ અંક ખરો આવે. નહીંતો સહસ્રાંશ, દશ સહસ્રાંશ આદી આંકડા મૂકી દઇએ તેની કસર આવે, વળી ગુણ્યનો સહસ્રાંશ ને ગુણકના દશકનો, ગુણ્યના દશ સહસ્રાંશને ગુણકના શતકનો ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. તેમજ ગુણ્યના દશાંશનો ને ગુણકના દશાંશનો, ગુણ્યના એકમ ને ગુણકના શતાંશનો, ઈત્યાદિ ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. માટે તે એક બીજાની નીચે મૂકવાને ઉલટાવવા પડે છે, કે ભૂલ થાય નહીં. અને કસર ન આવે. માટે જે બે અંકોનો ગુણાકાર શતાંશ આવનો હોય તેની પાસેના જમ-

ણા આંકડાના ગુણાકારની વદી ઉમેરવામાં આવે છે. અને એ ગુણા-
કારનો દરેક પેહેલો અંક શતાંશ આવે છે, માટે તે આંકડો કાપ્યા
વગર એક બીજાની નીચે મૂકીએ છીએ.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વદી ૫ થી ૧૪ સુધીની એક ઇત્યાદિ ગણીએ છીએ તેનું કારણ—ગુણ્યને ગુણકના જે અ-
કોનો ગુણાકાર શતાંશ આવતો હોય તે ગુણ્યના અંકની જમણી
બાજુના અંક સાથે તે ગુણકના અંકના ગુણાકારની વદી ૫ થી ૧૪
સુધી એક, ૧૫ થી ૨૪ સુધી બે, એ રીતે ઉપર મુજબ ગણી
ઉમેરવામાં આવે છે. અને તે એકજ અંકની વદી એ પ્રમાણે ગણાય
છે. બાકીના ગુણાકારમાં સાદા ગુણાકાર માફક ગણાય છે. કેમકે
તે આંકડો અને તેની પછીના આંકડા મૂકી દેવામાં આવે છે. તેથી
જો કસરની રીતે એની વદી ઉમેરવામાં આવે નહીં, તો કસર જાય.
હવે તે મૂકી દીધેલા અંકોની વદી ઉપર વદી ઉપર પ્રમાણે ૫ થી
૧૪ સુધીની એક ગણાય છે. કેમકે જો ગુણાકાર એકથી ચાર સુધી
આવે તો તેની વદી ઉમેર્યાથી ચારને બદલે દશ ગણ્યા બરાબર થાય
તેથી છની કસર લીધી ગણાય. ને ચાર મૂકી દીધા કરતાં છ ઉમેરી
વદી ગણ્યાથી કસર વધારે આવે, માટે ચાર મૂકીએ છીએ. પણ
પાંચ છ કે તેની ઉપરાંતના ગુણાકારના આંકડા મૂકી દીધાથી કસર
વધારે જાય કેમકે છ મૂકી દેવાને બદલે છ ॥ દશ ગણી તેની વદી
ઉમેર્યાથી ચારની કસર લીધી. છ મૂકવા કરતાં ચાર વધારે લેવામાં
કસર થોડી માટે છની કે સાત વગેરેની વદી ગણીએ છીએ. એ
પ્રમાણે દશ ગુણાકાર આવે તોપણ એક વદી થાય, ને અગીઆર,
બાર, તેર ને ચોદ આવે તોપણ એક વદી આવે કેમકે દશકની

વદી એક ને ઉપરના ચાર સુધીની વદી ગણાય નહીં એટલે ચૈાદ સુધીની એક વદી ગણાય ને ઉપર મુજબ પંદરની વદી બે ગણાય એજ પ્રમાણે ૧૫ થી ૨૪ સુધીની બે, ૨૫ થી ૩૪ સુધીની ત્રણ ઇત્યાદિ.

વાંકડીઆ ભાગકારની રીત–જો ભાજકમાં ને ભાજ્યમાં પૂર્ણાંક હોય તેા તેનેા અથવા ભાજ્યમાં પૂર્ણાંક હોય અને ભાજકમાં ન હોય તેા તેનેા ભાગાકાર કરતાં ભાગાકારમાં પૂર્ણાંકના કેટલા આંકડા આવશે તે ધારી તે તથા જેટલા આંકડા દશાંશમાં લાવવાનું કહ્યું હોય એ બેના સરવાળા જેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખી તે પછીનેા અંક વદી લેવાને રાખી બાકીના કહાડી નાંખવા. પણ જો ખૂટે તેા ઉપર મીડાં ચઢાવી પુરા કરવા. જો ભાગાકારમાં પૂર્ણાંક આવવાના ન હોય તેા ભાગાકારમાં જેટલાં દશાંશ સ્થળ લાવવાના હોય તેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખવા, પણ જો ભાગાકારમાં પ્રથમ મીડાં આવ્યા પછી અંક આવવાના હોય તેા મીડાં સિવાય, જેટલા અંક આવવાના હોય તેટલા અંક ભાજકમાં રાખવા પછી ભાગ ચલાવવેા. જે ભાગ આવે તેણે ભાજકના વધારાના આંકડા સાથે ગુણી તેની વદી વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વદી ગણવાનું કહ્યું તે રીતે ગણી તેની પાસેના આંકડાના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. પછી બાકીના અંક સાથે ગુણી એ ગુણાકાર ભાજ્યના ડાબી તરફના અંક નીચે અનુક્રમે મૂકી બાદ કરવેા. બાકી રહે તે ઉપર આગલેા આંકડેા ચઢાવ્યા સિવાય ભાજકે ભાગ ચલાવવેા. જે ભાગ આવે તેણે પહેલાં કરતાં એક ઓછા આંકડા સાથે ઉપર મુજબ ગુણી તથા વદી ઉમેરી તે ગુણાકાર ભાજ્યની બાકીમાંથી બાદ કરવેા. વળી તે બાકી ઉપર, ઉપર

મુજબ ભાગ ચલાવવેા. ને એક એક એાછા સાથે ગુણી બાદ કરવેા એ પ્રમાણે છેવટ સુધી કરી ભાગાકારમાં લાવવાનાં દશાંશ સ્થળ જેટલા આંકડા કાપી ચિન્હ મૂકવું, એ જવાબ.

જેમકે ૪૨૨.૮૫૯૩÷૨૫.૮૭૦૬૩૮૨૫નેા ભાગાકાર કરી ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવા હેાય તેા ૪૨૨ ને ૨૫ એ પૂર્ણાંકના ભાગાકારથી જણાય છે કે બે પૂર્ણાંક આવશે ને ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવાનાં છે માટે પાંચ અંક ભાજકમાં રાખ્યા તેા ૨૫.૮૭૦ આવ્યા ને ૬ વધી માટે રાખ્યેા એટલે નીચે પ્રમાણે ભાગાકાર થશે.

૨૫.૮૭૦૬૩૮૨૫)૪૨૨.૮૫૯૩(૧૬.૩૪૫
૨૫૮૭૧
ભાજકના(.)નિ-૨૫.૮૭૦)૧૬૪૧૪ આ ભાગાકારને ભાજકનેા ગુણુ-
૧૫૫૨૨
શાનીશાળા આં- ૨૫.૮૭) ૮૯૨ કાર કરવાથી ભાજ્યના ઉપયેાગ-
૭૭૬
કડા ગુણાકારની ૨૫.૮)૧૧૬ માં લીધેલા આંકડા મળી રહેશે.
૧૦૩
વધી ગણવાના છે.. ૨૫.) ૧૩
૧૩
૦૦

વાંકડીઆ ભાગાકારની રીતનું કારણ—જેમ ગુણાકારમાં તેમ ભાગાકારમાં જેટલા જરૂરના તેટલાજ આંકડા રાખવામાં આવે છે કે જેથી વખતને મહેનતનેા બચાવ થાય. તેથી ભાગાકારમાં જે-

દશા આંકડા આવવાના હોય તેટલાજ આંકડા ભાજકમાં રાખી સાદા ભાગાકારની માફક ભાગ ચલાવવામાં આવે છે. વધારાના આંકડા મહેનત બચવા માટે ગણતા નથી. પહેલા ભાગનો ને ભાજકનો ગુણાકાર કરતાં ભાજ્યમાંથી બાદ કરવો. એ બાદબાકીમાં છેલ્લો અંક આવે તે જે દશાંશનો હોય તે, દશાંશ ગુણાકારની પેઠે હમેશાં આવે એવી ભાજકની રકમ લેઇ નવા ભાગનો ગુણાકાર કરવો. કેમકે શેા ઉપર ટુંકું થવાને નવો અંક ચઢાવવા નથી. હવે ભાગાકારમાં જેમ અંક નવો કહાડીશું તેમ તેની કીમત પહેલાંના અંક કરતાં દશ ગણી ઘટતી જશે, માટે ભાજકનો અંક દશ ગણો ભારે લેઈ ગુણવા જોઇએ અને તેથી ભાજકનો એકેક અંક કાપીને ગુણાકાર કરવો પડે છે. જેમ ઉપલા દાખલામાં.

૨૫.૮૭૦૬૩૮૨૫)૪૨૨.૮૫૯૩ (પણ આંમાં ભાગાકારમાં ત્રણ દશાંશ લાવવા છે ને બે અંક પૂર્ણાંકના આવશે માટે ભાજકમાં પાંચ અંકની જરૂર પડવાની. તેથી ૨૫.૮૭૦ સુધીના અંક પહેલા ભાગ એક સાથે ગુણવાને અને ૬ વદી લેવાને રાખી બાકીના કામમાં લીધા નથી. હવે ભાગાકારમાં પહેલો અંક દશકનો આવશે તેનો ને ૦ સહસ્રાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે ભાજ્યના શતાંશ ૫ સુધીના આંકડા કામમાં આવશે ને છેલ્લા બે પડ્યા રેહેશે, બીજો ભાગ ૬ એકમે જશે. ૭ એકમનો ને ભાજકના .૦૧ શતાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે શૂન્ય પડ્યું મૂકી સાતથી ગુણાકાર કર્યો છે. તેમજ ત્રીજો અંક ભાગાકારનાં ૩ દશાંશ આવશે, એનો તે ભાજકના .૮ નો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે સાતના ગુણાકારની વદી માત્ર આઠના ગુણાકારમાં ઉમેરી છે. એજ રીતે એકેક અંક

કાપ્યાથી ભાજ્યનો શતાંશ આવે છે માટે આંકડા કાપવામાં આવે છે.

ટીકા—લાલશંકરકૃત જુના અંકગણિતના ૬૨ મા મનોયત્નના છેલ્લા હિસાબ જેવા હિસાબમાં અનંત રકમોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે જેટલા આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેઈ સર્વાળો કરવો અને કેટલીકનો સર્વાળો ને કેટલીકની બાદબાકી કરવી હોય તો સર્વાળો કરવાની રકમો એકઠી કરવી ને બાદ કરવાની રકમો એકઠી કરવી, પછી તે બંનેની બાદબાકી કરવી. જેટલાં દશાંશ સ્થળ ખરાં લાવવાં હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેવી કેમકે તે પછીની રકમો લીધાથી તે લાવવાના આંકડાની કીમતમાં કાંઈ ફેર પડતો નથી. તેથી તે રકમો મૂકી દેવામાં આવે છે.

કાચાપાકા તોલની રીતનું કારણ-કાચાપાકા તોલમાં ૪૨ તોલે ૨૧ મો, ૪૪ તોલે અગીઆરમો, ૪૫ તોલે નવમો, ૪૮ તોલે છઠ્ઠો, ૫૦ તોલે પાંચમો, ૫૨ તોલે ૪$\frac{૧}{૩}$ મો, ૫૬ તોલે ૩$\frac{૧}{૨}$ મો, ૬૦ તોલે ૩ જો ભાગ કાચા તોલમાંથી કાપ્યાથી પાકો તોલ આવે છે, કેમકે ૪૨ તોલે કાચા એક મણે બશેર કાપ્યાથી પાકો મણ થાય છે ને બશેર એ કાચા મણનો ૨૧ મો ભાગ છે. તેમજ ૪૪ તોલે કાચા મણે ચાર શેર કાપ્યાથી પાકો મણ થાય ને ચાર શેર એક કાચા મણનો ૧૧ મો ભાગ છે. એજ પ્રમાણે ૬૦ તોલમાં મણે ૨૦ શેર કપાય ને ૨૦ શેર એ કાચા મણનો અથવા ૬૦ નો ૩ જો ભાગ છે ઇત્યાદિ.

પ્રમાણ.

એક સંખ્યાને બીજી સંખ્યા સાથે સરખાવવી હોય ત્યારે બંને

રકમોનું યુગ્મ કે જોડકું કહેવાય. યુગ્મના પહેલા પદને અગ્રસર અને બીજાને ઉપાગ્રસર કહે છે અને અગ્રસર ઉપાગ્રસરથી જેટલા ગણી નાની કે મોટી હોય તેને ગુણોત્તર કહેછે. જેમકે ૪:૧૨ એ બંને મળીને યુગ્મ કહેવાય ને એમાં ૪ અગ્રસર અને ૧૨ ઉપાગ્રસર છે ને $\frac{૪}{૧૨}$ અથવા $\frac{૧}{૩}$ ગુણોત્તર છે. એક યુગ્મના ગુણોત્તર જેટલુંજ બીજા યુગ્મનું ગુણોત્તર હોય ત્યારે બંને યુગ્મ અથવા બંને યુગ્મનાં ચારે પદો પ્રમાણમાં છે એમ કહેવાય. જેમકે ૪:૧૨ નું ગુણોત્તર $\frac{૧}{૩}$ ને ૭:૨૧ નું ગુણોત્તર પણ $\frac{૧}{૩}$ છે માટે એ બંને યુગ્મનાં ગુણોત્તર બરાબર છે તેથી તે બંને યુગ્મ ૪:૧૨=૭:૨૧ અથવા ૪:૧૨::૭:૨૧ આ પ્રમાણે લખાય છે :: અને = આ ચિન્હોનો અર્થ સરખાપણું બતાવવાનો છે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે દરેક યુગ્મનાં અગ્રસર ને ઉપાગ્રસર સજાતિય જોઇએ પણ એક યુગ્મનાં પદની સાથે બીજા યુગ્મનાં પદ સજાતિય હોવાનું કારણ નથી. ૪ મણ: ૧૨ મણ :: ૭ રૂ : ૨૧ રૂને એમ કહેવાય. કેમકે એમાં માત્ર એટલોજ અર્થ છે કે પહેલા યુગ્મનું ગુણોત્તર બીજા યુગ્મના ગુણોત્તરની બરાબર છે. અને ગુણોત્તર માત્ર સાદી સંખ્યાજ છે. પણ ૪ મણ :૧૨ કલાક આમ ન લખાય. કેમકે ૪ મણ એ ૧૨ કલાકનો $\frac{૧}{૩}$ છે એમ કહેવાયજ નહીં. એ બે સરખાવાયજ નહીં.

હવે ૪:૧૨::૭:૨૧ એ ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો તેનું ગુણોત્તર $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ હોવું જોઇએ. પણ $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ હોય તો છેદ ઉડાડ્યાથી ૪×૨૧=૭×૧૨ પણ થાયજ અને પ્રમાણનાં ચાર પદોમાં ૪ આદી, ૨૧ અંત અને ૧૨ અને ૭ વચલાં અથવા મધ્ય પદો છે, માટે ચાર પદ પ્રમાણમાં હોય તો આદિને અંતનો ગુણાકાર વચલા બે

મધ્યપદોના ગુણાકાર બરાબર થાય. તેમજ ૪:૧૨::૭:૨૧ છે માટે ૧૨:૪::૨૧:૭ એ ચાર પદો પણ પ્રમાણમાં રહેજ એટલે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે. એજ રીતે એ ચાર પદોને જુદી જુદી રીતે ફેરવીને લખીએ તો આઠ રીતે પ્રમાણમાં લખી શકાય.

જો ૪:૧૨::૭:૨૧ એ પ્રમાણમાં હોય તો ૪+૧૨:૧૨::૭+૨૧:૨૧ છે, કેમકે $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ છે. હવે જો બે બરાબરમાં બરાબર રકમ ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ તો સરવાળો કે બાદબાકી બરાબર રહે, તેથી $\frac{૪}{૧૨}=\frac{૭}{૨૧}$ તેમાં બંને તરફ એક ઉમેરીએ તો $\frac{૪}{૧૨}+૧=\frac{૭}{૨૧}+૧$ થાય અથવા $\frac{૪+૧૨}{૧૨}=\frac{૭+૨૧}{૨૧}$ થાય. એને પ્રમાણમાં લખીએ તો ૪+૧૨:૧૨::૭+૨૧:૨૧ આવે. તેમજ ૧૨:૪::૨૧:૭ છે તો ૧૨−૪:૪::૨૧−૭:૭ થાય કેમકે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે તો ૧૨−૪:૪::૨૧−૭:૭ થાય કેમકે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે તે બંનેમાંથી એક બાદ કર્યો તો $\frac{૧૨}{૪}-૧=\frac{૨૧}{૭}-૧$ અથવા $\frac{૧૨-૪}{૪}=\frac{૨૧-૭}{૭}$ થાય અથવા ૧૨−૪:૪::૨૧−૭:૭ આવે.

વળી ૧૨:૪::૨૧:૭ છે તો ૧૨+૪:૧૨−૪::૨૧+૭:૨૧−૭ છે. કેમકે પાછળ કહ્યા પ્રમાણે ૧૨+૪:૪::૨૧+૭:૭ અથવા $\frac{૧૨+૪}{૪}=\frac{૨૧+૭}{૭}$ છે. અને ૧૨−૪:૪::૨૧−૭:૭ અથવા $\frac{૧૨-૪}{૪}=\frac{૨૧-૭}{૭}$ છે. હવે બરાબરને બરાબર રકમે ગુણે અથવા ભાગે તો તે ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર પણ બરાબર રહે છે માટે $\frac{૧૨+૪}{૪}$ ને $\frac{૧૨-૪}{૪}$ એ અને $\frac{૨૧-૭}{૭}$ ને $\frac{૨૧-૭}{૭}$ એ ભાગીએ તો અપૂર્ણાંક ભાગાકારની રીતે ઉલટાવીને ગુણ્યા તો $\frac{૧૨+૪}{૪}\times\frac{૪}{૧૨-૪}=\frac{૨૧+૭}{૭}\times\frac{૭}{૨૧-૭}$ અથવા $\frac{૧૨+૪}{૧૨-૪}=\frac{૨૧+૭}{૨૧-૭}$ અથવા ૧૨+૪:૧૨−૪::૨૧+૭:૨૧−૭ થાય.

ઉપરની સિદ્ધતાઓથી નીચેના નિયમો નીકળે છે.

૧. જ્યારે ચારપદો પ્રમાણમાં હોય ત્યારે આદિ ને અંતનો ગુ-

રગુણાકાર એ મધ્યપદોના ગુણાકારની બરાબર થાય.

૨. પહેલા અને બીજા પદનો અથવા બીજા ને પહેલા પદનો ભાગાકાર ને ત્રીજા ને ચોથાનો અથવા ચોથા ને ત્રીજાના ભાગાકારની બરાબર થાય.

૩. પહેલા બીજાનો સરવાળો: બીજાને :: ત્રીજા ને ચોથાનો સરવાળો: ચોથાને.

૪. પહેલાને બીજાની બાદબાકી : બીજાને :: ત્રીજાને ચોથાની બાદબાકી : ચોથાને.

૫. પહેલાને બીજાનો સરવાળો : પહેલાને બીજાની બાદબાકીને :: ત્રીજાને ચોથાનો સરવાળો : ત્રીજાને ચોથાની બાદબાકીને છે.

૬. જો ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો બન્ને અગ્રસરોના સરવાળા અથવા બાદબાકી : બન્ને ઉપાગ્રસરોના સરવાળા અથવા બાદબાકીને છે :: પહેલા અથવા બીજા યુગ્મનું અગ્રસર : પહેલા અથવા બીજા યુગ્મના ઉપાગ્રસરને છે. જેમકે ૨૧:૭::૧૨:૪ હોય તો ૨૧+૧૨:૭+૪::૨૧:૭ અથવા ૨૧+૧૨:૭+૪::૧૨:૪ અથવા ૨૧–૧૨:૭–૪::૧૨:૭ અથવા ૨૧–૧૨:૭–૪::૧૨:૪

૭. બે યુગ્મ પ્રમાણમાં હોય તો અગ્રસરોનો સરવાળો : અગ્રસરોની બાદબાકીને છે :: ઉપાગ્રસરોનો સરવાળો : ઉપાગ્રસરોની બાદબાકીને છે. જેમકે ૨૧:૭::૧૨:૪ હોય તો ૨૧+૧૨:૨૧–૧૨::૭+૪:૭–૪

૮. જો ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય ને તેમાંનાં કોઈપણ ત્રણ પદ આપ્યાં હોય તો ચોથું અથવા બાકીનું પદ નીકળી શકે; જેમકે ૧૨:૪::૨૧:૭ હોય ને ૧૨:૪::૨૧:( ) આમાં ચોથું પદ કાહાડવું હો-

ય તો ૧૨×ચોથું=૨૧×૪ છે માટે ચોથા પદ=$\frac{૨૧\times૪}{૧૨}$=૭ આવે. તેમજ ૧૨:૪::( ):૭ આમાં ત્રીજું પદ કહાડવું હોય તો ૧૨×૭=૪×ત્રીજું પદ માટે ત્રીજા પદ=$\frac{૧૨\times૭}{૪}$=૨૧ આવે. તેમજ ૧૨:( ):: ૨૧:૭ આમાં બીજું પદ કહાડવું હોય તો ૧૨×૭=બીજું×૨૧. તો બીજા પદ=$\frac{૧૨\times૭}{૨૧}$=૪ આવે. તેમજ ( ):૪::૨૧:૭ આમાં પહેલું પદ કહાડવું હોય તો પહેલું પદ×૭=૨૧×૪ તો પહેલા પદ=$\frac{૨૧\times૪}{૭}$=૧૨ આવે.

૯. કોઈ પણ બે રકમોના ગુણાકાર બીજી કોઈ પણ બે રકમોના ગુણાકારની બરાબર હોય તો પહેલી બેને આદિ ને અંતપદની જગાએ ને બીજી બેને બે મધ્યપદોની જગ્યાએ મૂક્યાથી તે ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે ૧૨×૭=૨૧×૪ છે, માટે ૧૨:૨૧::૪:૭ પ્રમાણમાં આવે, વળી જો બે રેકમોનો ભાગાકાર બીજી બે રકમના ભાગાકાર બરાબર હોય તો પહેલી બેને પહેલા યુગ્મમાં ને બીજી બેને બીજા યુગ્મમાં અગ્રસર ને ઉપાગ્રસરની જગાએ મૂકવાથી તે ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે $\frac{૧૨}{૪}=\frac{૨૧}{૭}$ છે માટે ૧૨:૪::૨૧:૭ પ્રમાણમાં આવે.

૧૦ તેથી જો સરખા ગુણોત્તરનાં ઘણાં યુગ્મ પ્રમાણમાં હોય તો બધા અગ્રસરોનો સરવાળો : બધા ઉપાગ્રસરોના સરવાળાને :: કોઈ પણ એક યુગ્મનું અગ્રસર : તે તેજ યુગ્મના ઉપાગ્રસરને. જેમકે ૩:૫, ૯:૧૫. ૧૮:૩૦, ૩૩૦:૫૫૦ હોય તો ૩+૯+૧૮+૩૩૦:૫+૧૫+૩૦+૫૫૦::૩:૫ અથવા $\frac{૩+૯+૧૮+૩૩૦}{૫+૧૫+૩૦\times૫૫૦}=\frac{૩}{૫}$ અથવા=$\frac{૯}{૧૫}=\frac{૧૮}{૩૦}=\frac{૩૩૦}{૫૫૦}$.

૧૧. જો ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તેવા સરખાં ગુણોત્તરનાં એક કરતાં વધારે ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો દરેક પહેલા યુગ્મના અગ્રસરોનો ગુણાકાર : દરેક પહેલા યુગ્મના ઉપાગ્રસરોના ગુ-

ણાકારને છે::દરેક બીજા યુગ્મના અગ્રસરોનો ગુણાકાર; દરેક બીજા યુગ્મના ઉપાગ્રસરોના ગુણાકારને છે. જેમકે,

૪:૭::૧૨:૨૧ }
૫:૧૮::૧૨૦:૪૩૨ } તો ૪×૫×૧૩:૭×૧૮×૯::૧૨×૧૨૦×૩૯:
૧૩:૯::૩૯:૨૭ } ૨૧×૪૩૨×૨૭

ત્રીરાશી.

ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—ઉપર પ્રમાણના જે નિયમો આપ્યાછે તેનો જેમાં ઉપયોગ થાયછે તેને ત્રીરાશી કહેછે. કેમકે એમાં પ્રમાણનાં ચાર પદોમાંનાં ત્રણ આપેલાં હોય છે, ને ચોથું પદ કહાડવાનું હોયછે. પ્રમાણમાં આપણે કહી ગયા કે પ્રમાણનાં ચારે પદો સજાતિયજ હોવાં જોઇએ એમ નથી, પણ દરેક યુગ્મનાં પદો તો સજાતિય જોઇએજ. ત્રીરાશીમાં ચારમાંનાં ત્રણ પદો આપેલાં હોયછે તેમાં એક યુગ્મનાં બે સજાતિય પદો આપેલાં હોય છે ને બીજા યુગ્મનું એક પદ આપેલુ હોયછે ને તેના જાતનું ચોથું પદ કહાડવાનું હોયછે માટે ત્રીરાશીના હિસાબમાં વિચારી જોવું કે કયાં સજાતિય બે પદો પ્રમાણમાં આપેલાંછે. અને કયા પદની જાતિનો જવાબ કહાડવાનોછે. પછી એ ત્રણ પદોને પ્રમાણમાં લખી ચોથું પદ કહાડવું. જેમકે ૪ માણુસ ૨૦ ફુટ વાડ કાપે તો ૧૬ માણુસ કેટલા ફુટ વાડ કાપશે. આમાં ચાર માણસ ૧૬ માણુસ સાથે જે પ્રમાણમાં છે તે પ્રમાણમાં ૨૦ ફીટ જવાબની સાથે રહેશે. એટલે જવાબ ફૂટનો કહાડવાનો છે માટે ૪ માણુસ:૧૬ માણુસને :: ૨૦ ફુટ: જવાબ. હવે પાછળ પ્રમાણમાં કહ્યા પ્રમાણે ૪ આદી×અંત જવાબ=૧૬×૨૦ તેથી ૪×જવાબ=૩૨૦ તો જવાબ=

૮૦ ફીટ કેમકે પહેલા યુગ્મમાં અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર જેટલા ગણા છે તેટલાજ ગણા બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર આવવા જોઇએ, અથવા ૪:૧૬ :: ૨૦ : જવાબ. એટલે $\frac{૪}{૧૬}=\frac{૨૦}{જવાબ}$. તો ૪×જવાબ=૨૦×૧૬ તો જવાબ=૮૦.

આવી ત્રીરાશીઓને સમત્રીરાશી કહેછે. કેમકે જેમ માણસ વધારે છે તેમ કાળ પણ વધારે થાય છે. તેમજ અમુક ચીજની કામતમાં ચીજોની સંખ્યા વધે કે ઘટે તેમ કીમત પણ વધે કે ઘટે. માલ લેઈ જવાનું ભાડું, ગાસ વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં અથવા અંતર વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. જમીનનું ગણોત, જમીન વધે કે ઘટે અથવા મુદ્દત વધે કે ઘટે, તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. મજૂરની મજુરી, મજુરની સંખ્યા વધે કે ઘટે અથવા વખત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. નાણાંનું વ્યાજ, વ્યાજે મૂકેલી રકમ વધે કે ઘટે અથવા મુદ્દત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. વગેરે. આ પ્રકારના હિસાબને સમત્રીરાશી કહે છે.

વ્યસ્ત ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—જ્યારે પહેલા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર વધારે હોય તોપણ બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર ઓછું આવવાનું હોય તેને વ્યસ્ત ત્રીરાશી કહે છે. જેમકે ૪ માણસ કોઈ કામ ૨૦ દિવસમાં કરે તો ૧૬ માણસ કેટલા દિવસમાં કરે. આમાં ચાર માણસ કરતાં ૧૬ માણસ ૪ ગણાં છે, પણ દિવસ ચાર ગણા ઓછા લાગશે. એટલે માણસ વધ્યાથી મુદ્દત ઘટી તેથી એ વ્યસ્ત પ્રમાણ થયું. એને સમત્રીરાશીની માફક પ્રમાણમાં મૂકીએ તો પ્રમાણ રહેશે નહીં, કેમકે ૪ માણસ : ૧૬

માણુસ :: ૨૦ દિવસ : ૫ દિવસ અથવા જવાબતે છે. આમાં ચાર ગણાં માણુસ વધ્યાથી કામ ચારગણું જલદી થવાનું માટે દિવસ તો પાંચજ થવાના. તો ઉપર મુજબ પ્રમાણ મૂકયાથી આદિ ૪×અંત ૫=એ મધ્ય પદો ૧૬×૨૦ થશે નહીં. માટે પહેલા યુગ્મના અગ્રસરને ઉપાગ્રસરની જગોએ અને ઉપાગ્રસરને અગ્રસરની જગાએ મૂકવું જોઇએ. તેથી ૧૬ માણુસ: ૪ મા. :: ૨૦દિ : ૫ દિ. એટલે ૧૬×૫=૨૦×૪ આવ્યા. અને એ પ્રમાણે પહેલા યુગ્મનાં પદ ઉલટાવવાં પડે છે માટે એને વ્યસ્ત પ્રમાણ કહે છે. એજ પ્રમાણે જેમ કપડાંની પહોળાઈ વધે તેમ લંબાઇ ઓછી જોઇએ. અમુક કીમત પૂરી કરવાને જેમ સિકકાની કીમત વધે તેમ સિકકાની સંખ્યા ઘટે. અમુક અંતર જવામાં જેમ વખત વધે તેમ ચાલવાનું માપ ઘટે. અમુક ભાડામાં માલ લેઇ જવા સારૂ જેમ વજન વધે તેમ અંતર ઘટે. વગેરે જાતના હિસાબ વ્યસ્તરાશીના છે.

બહુરાશી એટલે શુ?-બે અથવા તેથી વધારે ગુણોત્તર ઉપરથી નવું ગુણોત્તર ઉત્પન્ન કરીએ તે ગુણોત્તરને મિશ્રગુણોત્તર કહેવાય. જેમ ૫:૬=$\frac{૫}{૬}$ અને ૭:૧૨=$\frac{૭}{૧૨}$ આ ગુણોત્તરમાંનાં અગ્રસર ૫ ને ૭ અને ઉપાગ્રસર ૬ અને ૧૨ નો ગુણાકાર કરી ૩૫:૭૨=$\frac{૩૫}{૭૨}$ એ ગુણોત્તર ઉત્પન્ન કર્યું. એ મિશ્રગુણોત્તર તે ગુણોત્તરના અપૂર્ણાંકોના ગુણાકારને મળતું આવે છે. જેમકે ૫:૬=$\frac{૫}{૬}$ ગુણોત્તર અને ૭:૧૨=$\frac{૭}{૧૨}$ગુણોત્તર. એ બેનો ગુણાકાર $\frac{૫}{૬}$×$\frac{૭}{૧૨}$=$\frac{૩૫}{૭૨}$ આવ્યા એટલે ગુણોત્તર ૩૫:૭૨ આ પ્રમાણનું છે. ઘણાં પ્રમાણ એકઠાં કરવાને આ પ્રમાણે મિશ્ર ગુણોત્તર કહાડવું પડે છે. એ મિશ્ર ગુણોત્તરના પ્રમાણને મિશ્ર

પ્રમાણ અથવા બહુરાશી પ્રમાણ કહે છે.

બહુરાશીનું કારણ—જ્યારે બે ગુણોતર ત્રીજા પદમાં જૂદી જૂદી રીતે વધઘટ કરે ત્યારે તે વધઘટ એ બે ગુણોત્તરથી થયેલા મિશ્ર ગુણોત્તરથી થતી વધઘટની બરાબર થવી જોઈએ. માટે એ બંને ગુણોત્તરમાંના અગ્રસરે અગ્રસરનો ને ઉપાગ્રસરે ઉપાગ્રસરનો ગુણાકાર કરીને નવું અગ્રસર ને ઉપાગ્રસર ઉત્પન્ન કરી ત્રીજા પદમાં થતી વધઘટ કહાડીએ છીએ.

સાંકળ રીતી—જૂદી જૂદી ત્રીરાશીઓ એકઠી કરવાની રીત ને સાંકળ રીતી કહે છે. તેથી એ રીતનું કારણ ને પ્રમાણનું કારણ સરખુંજ છે માટે તે આ ઠેકાણે ફરીને સમજાવ્યું નથી.

વ્યાજ.

વ્યાજ એટલે રૂપિઆનું ભાડું. કોઈ રકમ લેતી વખત તેને જે નફો આપવાનું કબુલ કરીએ તે વ્યાજ. એ વ્યાજ સો રૂપિઆ ઉપર મહિને કે વરસે ઠરાવે છે. વ્યાજના હિસાબમાં જેટલા રૂપિઆ લે તે મુદ્દલ. જેટલો વખત એ રૂપિઆ રહે તે મુદ્દત. એ રૂપિઆ ઉપર સો રૂપિએ એક વરસે જે રકમ આપવાનું ઠરાવ્યું હોય તે તેરીખ ને એ તેરીખને મુદ્દત પ્રમાણે એ રૂપિઆ ઉપર જેટલું વધારે આપવાનું થાય તે વ્યાજ, ને વ્યાજ મુદ્દલ મળીને જેટલું થાય તે રાશ કે વ્યાજમુદ્દલ કહેવાય.

સાદા વ્યાજની રીતનું કારણ—વ્યાજ, મુદ્દલને મુદ્દતના પ્રમાણમાં વત્તું ઓછું થાય છે. સો રૂપિયા ચાર ટકાની તેરીખે એક વરસ રહે તો ચાર રૂપિઆ વ્યાજ થાય પણ બે વરસ રહે તો આ

થાય. અથવા બસે રૂપિઆ એક વરસ રહે તો આઠ રૂપિઆ થાય ને બે વરસ રહે તો સોળ રૂપિઆ થાય. તેમજ સો રૂપિઆ એક વરસ ૫ ટકાની તેરીખે રહે તો પાંચ રૂપિઆ ને બે વરસ રહે તો દશ રૂપીઆ થાય. એ વ્યાજને સાદું વ્યાજ કહે છે ને એના હિસાબ પંચરાશી રીતેજ પ્રમાણ બાંધ્યાથી થાય છે માટે એનું કારણ ને ત્રીરાશીનું કારણ એકજ છે. જેમકે પાંચ ટકા લેખે ચાર વરસે ૨૦૦ રૂપિઆનું વ્યાજ શું?

૧૦૦ રૂ. : ૨૦૦રૂ. } :: ૫ ટકા વ્યાજ જવાબ.
૧વ. ૪વ. }

એટલે. $\frac{૨૦૦\times૪\times૫}{૧૦૦}$= ૪૦ રૂપિઆ વ્યાજ એ જવાબ.

આ પ્રમાણ ઉપરથી સાદું વ્યાજ કહાડવાની નીચેની રીત નીકળી છે.

મુદ્દલ, મુદ્દતનાં વર્ષ ને તેરીખના ગુણાકારને સોએ ભાગવા તેથી વ્યાજ આવશે. એટલે વ્યાજ=$\frac{\text{મુદ્દલ}\times\text{મુદ્દત}\times\text{તેરીખ}}{૧૦૦}$

સાદા વ્યાજમાં મુદ્દલ, મુદ્દત, તેરીખ ને વ્યાજ એ ચારમાંથી કોઈ પણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તો ચોથું પદ કહાડવાના કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થાયછે તે.

મુદ્દલ કહાડવું હોય તો—જેમકે ૫ ટકાની તેરીખે ૪ વર્ષે ૪૦ રૂ. વ્યાજ થયું તો મુદ્દલ શું? એનું પ્રમાણ—

૫ રૂ. વ્યાજ;૪૦ રૂ. વ્યાજ::૧૦૦ મુદ્દલ:જવાબ મુદ્દલ.
૧ વ: ૪વ: વ્યસ્ત પ્રમાણ છે માટે ઉલટાવ્યા તેથી
$\frac{૪૦\times૧૦૦}{૫\times૪}$=૨૦૦ મુદ્દલ જવાબ. તે ઉપરથી નીચેનું કોષ્ટક છે:

ત્પન્ન થાય છે. $મુદ્દલ=\frac{૧૦૦×વ્યાજ}{તેરીખ×મુદ્દત}$

મુદ્દત કહાડવી હોય તો—પાંચ ટકા લેખે બસેં રૂપીઆનું ૪૦ રૂા. વ્યાજ થયું ત્યારે મુદ્દત કેટલી? એનું પ્રમાણ.

બીજું પ્રમાણ વ્યસ્તછે ૫ રૂા. વ્યાજ:૪૦ રૂા. વ્યા::૧વ: જ.વ.
તે ઉલટાવ્યું તો. ૨૦૮ :૧૦૦

તેથી$\frac{૪૦×૧૦૦}{૫×૨૦૦}$=૪ વરસ જવાબ. તે ઉપરથી નીચેનો કોઠો ઉત્પન્ન થાય છે. $મુદ્દત=\frac{૧૦૦×વ્યાજ}{તેરીખ×મુદ્દલ}$

તેરીખ કહાડવી હોય તો—૨૦૦ રૂ.નું ૪ વરસે ૪૦રૂા.વ્યાજ થયું ત્યારે તેરીખ શી? એનું પ્રમાણ.

૨૦૦ રૂા. મુ.: ૧૦૦રૂા.:મુ. ૪૦રૂા. વ્યાજ.મુ::તે જવાબ.
૪ વ. : ૧વ.

બંને સમપ્રમાણ છે તેથી $\frac{૧૦૦×૪૦}{૨૦૦×૪}$=૫રૂ. તેરીખ જવાબ.

તે ઉપરથી નીચેની રીત નીકળે છે. $તેરીખ=\frac{૧૦૦×વ્યાજ}{મુદ્દલ×મુદ્દત}$

ટીકા—મુદ્દતમાં વર્ષ, માસ ને દિવસ આપ્યા હોય તો તે બધાને વરસનું રૂપ આપવું. તેમાં ૩૦ દિવસનો મહિનો ને બાર મહીનાનું વરસ ગણવું. વરસને દિવસ આપ્યા હોય તો દિવસને ૩૬૫ ભાગી વરસનું રૂપ આપવું. ઇંગ્રેજી મહિના આપ્યા હોય તો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણીને પછી વરસનું રૂપ આપવું.

સરકારી નવા અંકગણિતના ૬૭ મા મનોયત્નના ૨૦, ૨૧ જિ-મા હિસાબ સાદા વ્યાજની રીતમાં આવે, પણ તેમાં થોડો તફાવ-

ત છે. તેમાં મુદ્દલનું સવા વરસનું વ્યાજ અને એજ રકમ સવા વરસ પછી દેવી થવાની હોય તો મુદત કાપવાની રકમ આપેલીછે ને તે ઉપરથી તેરીખને મુદ્દલ કહાડવાનું છે. મુદ્દત કાપવાની રકમમાં તેનું વ્યાજ ઉમેરીએ તો આપેલું વ્યાજ થાયછે. જેમકે પાંચ ટકા લેખે સો રૂપીઆનું વ્યાજ ૫ રૂપીઆ થાય ને મુદત કાપવાના $\frac{૧૦૦}{૨૧}$ થાય ને એ મુદ્દત કાપવાની રકગમાં તેનું વ્યાજ $\frac{૫}{૨૧}$ ઉમેરીએ તો વ્યાજના જેટલા $\frac{૧૦૫}{૨૧}$=૫ રૂ. થાય છે. માટે ઉપલા હિસાબમાં પણ મુદ્દત કાપવાની રકમ ૩૦+તેનું વ્યાજ=$૩૦\frac{૨૭}{૩૨}$ છે માટે $૩૦\frac{૨૭}{૩૨}$−૩૦=$\frac{૨૭}{૩૨}$રૂ. ૩૦ રૂ. નું સવા બર્ષનું વ્યાજ થયું તેથી $\frac{૨૭}{૩૨}$ વ્યાજ: $૩૦\frac{૨૭}{૩૨}$ :: ૩૦ મુ. : જવાબ $૧૦૯૬\frac{૨}{૩}$ મુદ્દલ આવ્યું તે ઉપરથી તેરીખ કહાડવાને તેરીખ=$\frac{૧૦૦\times ૩૦\frac{૨૭}{૩૨}}{૧૦૯૬\frac{૨}{૩}\times\frac{૫}{૪}}$=$૨\frac{૧}{૪}$વ.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની રીતનું કારણ.

જેમાં વ્યાજનું વ્યાજ ગણવામાં આવેછે તેને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહેછે. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં વરસે વરસે કે હપ્તે હપ્તે મુદ્દલનું વ્યાજ ગણી મુદ્દલમાં મેળવી જે રાશ થાય તેને બીજા વરસનું કે બીજા હપ્તાનું મુદ્દલ ગણવામાં આવે છે. એ પ્રમાણે આપેલી મુદ્દત સુધી ગણાય છે જેમકે ૫૦૦ રૂપિઆનું બે વરસનું ૫ ટકા લેખે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શું?

૧૦૦ : ૫૦૦ :: ૫ : ૨૫ રૂ. વ્યાજ પહેલે વરસે થયું. તે +૫૦૦ મુદ્દલ=બીજા વરસનું મુદ્દલ થયું માટે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને ૧૦૦ : ૫૨૫ :: ૫ : $૨૬\frac{૧}{૪}$ વ્યાજ થયું તે+૫૨૫ મુદ્દલ =$૫૫૧\frac{૧}{૪}$ બે વરસે વ્યાજને મુદ્દલ મળીને થયું અથવા તેમાંથી ૫૦૦ મુદ્દલ બાદ કરીએ તો $૫૧\frac{૧}{૪}$ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ થયું. ઉપરના ત્રિરાશી

પ્રમાણથી ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની રીતનું કારણ સમજાશે. પણ ઘણી મુદતનું કહાડવું હોય, અને મુદ્દલને તેરીખ અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે લંબાણ ઘણું થાયછે. તેથી એક ટુંકી રીત છેલ્લી રીત ઉપરથી કરેલી છે તે નીચે પ્રમાણે છે.

કહેલી તેરીખ પ્રમાણે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ કહાડી તેનો મુદતની સંખ્યા જેટલો ઘાત કરવો અને તે ઘાતને મુદ્દલે ગુણવા. ગુણાકાર આપેલી મુદતની રાશ થશે. માટે જો ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહાડવું હોય તો આવેલી રાશમાંથી આપેલું મુદ્દલ બાદ કરવું એ જવાબ.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણવાની સહેલી રીતનું કારણ.

આ કારણ દાખલાથી જલદી સમજાશે માટે ઉપરનોજ દાખલો લેઈએ.

૧૦૦ રૂ. નું પાંચ રૂપીઆ વ્યાજ તો એક રૂપીઆનું કેટલું ૧૦૦ : ૧ :: ૫ : ·૦૫ એટલે બીજા વરસનું મુદ્દલ=૧+·૦૫= ૧·૦૫ તે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને ૧ રૂ.ની ૧·૦૫ રાશ તો ૧·૦૫ ની રાશ કેટલી? એટલે,

૧: ૧·૦૫ મુ.રૂ :: ૧·૦૫ વ્યાજ મુદ્દલ: જવાબ. તેથી $\frac{૧·૦૫ \times ૧·૦૫}{૧૨}$ =૧·૧૦૨૫ અથવા (૧·૦૫)=૧·૧૦૨૫ આવેલી એક રૂપિઆની રાશ માટે ૧·૧૦૨૫×૫૦૦=૫૦૦ રૂ.ની રાશ પણ જોચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહાડવું હોય તો ·૧૦૨૫×૫૦૦=૫૦૦ રૂ.નું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

એજ પ્રમાણે પાંચસેં રૂપીઆનું ચાર વરસનું વ્યાજ કહાડવું હોય તો એક રૂપીઆની રાશ બીજે વરસે ૧·૧૦૨૫ થઇ છે તે

ત્રીજા વરસનું મુદલછે માટે ૧ રૂ. મુ:૧·૧૦૨૫ રૂ. મુ. :: ૧·૦૫ રૂ. વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

માટે ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫ ત્રીજા વરસની રાશ અથવા ચોથા વરસનું મુદલ આવ્યું તેથી ચોથા વરસની રાશ કહાડવાને ૧ રૂ. મુ.: ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫ રૂ. મુ :: ૧·૦૫ રૂ. વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

માટે ૧·૧૦૨૫×૧·૦૫×૧·૦૫ અથવા ૧·૧૦૨૫×૧.૧૦૨૫ અથવા $(૧·૧૦૨૫)^{૨}$=એક રૂપીઆની ચાર વરસની રાશ એને મુદલે ગુણ્યા તો $(૧·૧૦૨૫)^{૨}$×૫૦૦=કુલ રાશ—૫૦૦=ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ એ જવાબ.

ટીકા—ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં વરસની સાથે માસ દિવસ હોય તો જેટલા માસ ને દિવસ હોય તેને અથવા દિવસ હોય તો તેને વરસનું રૂપ આપવું. પછી ઉપરની રીત પ્રમાણે પૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડી જે રાશ આવે તેનું સાદા વ્યાજની રીતે અપૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડવું તે વ્યાજ ને પ્રથમ આવેલા વ્યાજનો સરવાળો કારવો એ જવાબ.

જેમ સાદા વ્યાજમાં મુદલ, મુદત, તેરીખ ને વ્યાજ એ ચારમાંથી કોઇ પણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનું પદ નીકળેછે તેમ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં પણ નીકળેછે.

મુદત, તેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદલ કહાડવું હોય તો તેની રીત ને કારણ—એક રૂપિઆની આપેલી મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે આપેલા વ્યાજને ભાગવા કેમકે એક રૂપિઆના આપેલી મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજને બદલે ગુણવાથી વ્યાજ આવેછે એટલે વ્યાજ=એક રૂપીઆનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ×મુદલછે

માટે મુદલ =વ્યાજ+એક રૂપિઆનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

મુદલ, મુદતને વ્યાજ ઉપરથી તેરીખ કહાડવી હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગવા એટલે એક રૂપિઆનું આપેલી મુદતનું વ્યાજ આવશે તેમાં એક રૂપિઓ ઉમેર્યાથી એક રૂપિઆની આપેલી મુદતની રાશ થશે, માટે તેનું આપેલી મુદત જેટલું ઘાત મૂળ કહાડવું, તેથી એક રૂપિઆનું એક વરસનું વ્યાજ મુદલ આવશે તેમાંથી એક બાદ કર્યાથી એક રૂપિયાનું એક વરસનું વ્યાજ રહેશે, તેને સોએ ગુણ્યાથી તેરીખ આવશે. જો વ્યાજને બદલે રાશ આપી હોય તો તેને મુદલે ભાગ્યાથીજ એક રૂપિઆની આપેલી મુદતની રાશ આવશે, તે ઉપરથી ઉપર પ્રમાણે તેરીખ કહાડવી. કેમકે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશને મુદત જેટલા ઘાત કરી મુદલે ગુણ્યાથી કુલ રાશ આવેછે અથવા તેમાંથી મુદલ બાદ કર્યાથી કુલ વ્યાજ આવે છે, માટે મુદલે ભાગ્યાથી એક રૂપિઆની એક વરસની રાશનો મુદત જેટલો ઘાત આવે, માટે તેનું ઘાતમૂળ તે એક રૂપીઆની એક વરસની રાશ આવે, તેમાંથી એક રૂપિઓ મુદલ બાદ કર્યાથા વ્યાજ રહે તેને સોએ ગુણ્યા એટલે તેરીખ આવે.

મુદલ, તેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદત કહાડવી હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગી એક રૂપિઓ ઉમેરવો. એટલી એક રૂપિઆની મુદત પ્રમાણે રાશ થશે. એ રાશ, તેરીખ ઉપરથી એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ કહાડી તેનો વર્ગ, ઘન કે ચતુર્ઘાત કરવાથી જે આવે તેની બરાબર થાય તો બે, ત્રણ કે ચાર વરસ મુદતનાં આવશે. મતલબ કે પ્રથમ આવેલી

રાશ એક રૂપિઆની એક વરસની રાશના કયા ઘાતની બરોબર છે તે કહાડવું એટલે જેટલા ઘાત કર્યા હોય તેટલાં વરસ મુદતનાં જાણવાં. જો વર્ગની બરાબર થાય તો બે વર્ષ, ઘનની બરાબર થાય તો ત્રણ ને ચતુર્ઘાતની બરાબર થાય તો ચાર. એજ પ્રમાણે આગળ પણ જાણવું.

ટીકા—વરસની સાથે મહિના કે દિવસ આવવાના હોય તો ઉપર પ્રમાણે વરસ કહાડયા પછી તેટલા વરસની આપેલા મુદ્દલની ઉપરની રીતે રાશ કહાડવી ને તે આપેલી રાશમાંથી બાદ કરવી. બાકી રહે તેટલું વ્યાજ થયાને છેલ્લી જે રાશ બાદ કરી હોય, તેને મુદ્દલ ગણી કેટલા દિવસ લાગશે તે સાદા વ્યાજની રીતે કહાડવા, કેમકે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ ઉપરથી બીજા વરસની રાશ કહાડીએ તે, આપેલી એક રૂપિઆની રાશ બરાબર થાય તો મુદત બેજ વરસ હોવી જોઈએ. પણ ત્રીજા વરસની રાશની બરાબર થાય તો ત્રણ વરસજ મુદતનાં હોવાં જોઇએ. એ ઉપરથી ઉપરની રીત કહાડી છે.

વટાવ ને મુદત કાપવા વિષે.

વટાવ કાપી આપવાનો માલની ખરીદી ઉપર હોય છે, એટલે પાંચ ટકા વટાવ કાપવાનો હોય તો સો રૂપિઆના માલની ખરીદી કરીએ તો પાંચ રૂપીઆ વટાવના કાપી આપે, એટલે સો રૂપીઆના ૯૫ રૂપિઆ રોકડા આપવા પડે. અને તે ઉપરથી જેટલાનો માલ લીધો હોય તે પ્રમાણમાં વટાવ કાપી આપે. તેથી એવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય છે માટે તેનું કારણ ત્રિરાશી જેવુંજ છે.

મુદ્દત કાપવાની રીત ખરી શાથી છે તેનું કારણ.

મુદ્દત કાપવી એટલે અમુક મુદત પછી અમુક દરે કોઈ રકમ દેવી થવાની હોય, તે રકમ હાલ લેવાને તેમાંથી આપેલી મુદતનું જે વ્યાજ કાપી આપવું તે. એ રકમમાંથી વ્યાજ કાપતાં જે બાકી રહે તેને તુર્ત કીંમત કહે છે. એ તુર્ત કીંમતને આપેલા દરે આપેલી મુદત સુધી વ્યાજે રાખ્યાથી દેવી થવાની રકમની બરાબર થવી જોઇએ. માટે પાંચ ટકા લેખે એક વરસ પછી ૧૦૫ રૂપિઆ દેવા થવાના હોય તો તેની તુર્ત કીંમત સો રૂપિઆ હોવી જોઈએ. કેમકે સો રૂપિઆને એક વરસ પાંચ ટકા લેખે વ્યાજે મૂકીએ તો ૧૦૫ રૂપિઆ થાય છે. ને તેમાં પાંચ રૂપિઆ મુદત કાપવાની રકમ છે. પણ પાંચ ટકા લેખે ૧૦૦ રૂપિઆ દેવા થવાના હોય તો તુર્ત કીંમત ૯૫ રૂપિઆ ન આવે, કેમકે ૯૫ રૂપિઆને પાંચ ટકા લેખે એક બરસ વ્યાજે રાખ્યાથી સો રૂપિઆ થતા નથી. પણ પાંચ રૂપિઆના વ્યાજ જેટલા ઓછા રહે છે. એટલે સો રૂપિઆની મુદત કાપવાની રકમ પાંચ રૂપિઆમાંથી પાંચ રૂપિઆના વ્યાજ જેટલી ઓછી રહે છે. ને સો રૂપિઆનું વ્યાજ પાંચ રૂપિઆ આવે છે. માટે જો કોઇ રકમની મુદત કાપવાની રકમ આપી હોય તો તેમાં તે મુદત કાપવાની રકમનું વ્યાજ ઉમેરીએ તો તે મૂળ રકમના વ્યાજની બરાબર થવું જોઇએ.

વેપારીની રીત ખોટી શાથી છે તેનું કારણ.

ઉપર પ્રમાણે મુદત કાપવાની રીતને વાસ્તવિક રીત કહે છે, પણ વેપારી લોકો તેમ કરતા નથી. તેમને લાંબી મુદત કાપવાની હોતી નથી. તેઓ પાંચ ટકા લેખે એક વરસની મુદત કાપવી હોય

તો એકદમ સોના પંચાણું લે છે. કેમકે ગણવાને સુગમ પડે છે. ને લાંબી મુદત કાપવાની નહિ હોવાથી ઝાઝો ફેર પડતો નથી. પણ એ રીત વ્યાજબી કહેવાય નહિ. આ મુદત કાપવાની રીતને વેપારીની રીત કહે છે.

ઉપરની રીત સાદે વ્યાજે મુદત કાપવાની છે, કેમકે મુદત એક વરસની અંદર ઘણું કરીને હોય છે. પણ વરસ કરતાં વધારે મુદત કાપવાની હોય ને તે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે કાપવાની હોય તો એક રૂપિઆની આપેલી મુદત સુધીની આપેલે દરે રાશ કહાડવી, તે રાશ ઉપરથી ત્રિરાશી રીતે આપેલી રકમની મુદત કાપવાની રકમ કહાડવી. એટલે એ રાશમાંથી એક રૂપિઓ બાદ કરીએ તો તે એક રૂપિઆની જે રાશ આવી હોય તેની મુદત કાપવાની રકમ થઈ, માટે એક રૂપિઆની રાશઃ આપેલી દેવી થવાની રકમને :: એક રૂપિઆની રાશની મુદત કાપવાની રકમ : મુદત કાપવાની રકમ=જવાબ.

ટીકા—હિંદુ મહિના હોય તો તે પ્રમાણે મહિનાના દિવસ ગણી વરસના ૩૬૦ દિવસ ગણવા. મહિનાના ૩૦ દિવસ ને વરસના ૧૨ મહિના. પણ અંગ્રેજી મહિના હોય તો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણી વરસના ૩૬૫ દિવસ ગણવા. દિવસ ગણવામાં પહેલો ને છેલ્લો બે દિવસમાંથી માત્ર એક દિવસ ગણવો.

વિમો કમિશન વગેરે.

અગ્નિ, જળ વગેરેથી પોતાના માલને નુકશાન ન થાય તે માટે કીમત ઉપર દર સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરાવીએ એ ઠરાવને વિમો કહેછે; ને એ જોખમ રાખનારને જે રકમ આપવાની

ઠરે તેને વીમા ખર્ચ કહે છે; તથા એ ઠરાવના લખતને વીમા ચીઠી કહે છે. આ હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય છે. જેમકે સેંકડે ૫ ટકા લેખે ૫૦૦ના માલનું વીમા ખર્ચ: શું? તો ૧૦૦ માલ : ૫૦૦ રૂ માલ :: ૫ રૂ વીમા ખર્ચ : જવાબ=૨૫ રૂપીઆ વીમાખર્ચ.

માલના વીમામાં માલનું નુકશાન થવાથી વિમા ખર્ચ સુદ્ધાંત કિંમત ભરી લેવાય એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો જાણવું કે સો રૂપીઆને બદલે સેંકડે જે વીમા ખર્ચ હોય તે સોમાંથી બાદ કરતાં બાકી રહે તેટલા રૂપીઆના માલ ઉપર સેંકડાનું વીમા ખર્ચ આપ્યું છે. જેમકે સેંકડે ૫ ટકા વીમા ખર્ચ આપ્યું હોય ને માલની કિંમત ભરી લેવાની ઠરે તો વીમા ખર્ચ સુદ્ધાંત મળે એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૯૫ રૂ.નો માલ હોવો જોઇએ, કેમકે માલની કિંમત ભરી લેઇએ ત્યારે સો રૂપીઆ મળે તેમાંથી ૫ રૂ તો વીમા ખર્ચના આપ્યા છે તે લેતાં ૯૫ રૂપીઆ બાકી રહે છે.

આપણા દેશમાં જીંદગીનો વીમો હાલમાંજ દાખલ થયો છે તેથી એ રીત નથી છે. જીંદગીનો વીમો ઉતરાવીએ ત્યારે જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તેટલા રૂપીઆ વીમો ઉતરાવનાર મરી ગયા પછી તેના વારસને વીમો ઉતારનાર આપે એવો ઠરાવ હોયછે. જીંદગીના વીમામાં સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરી હોય તે દરથી જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તે પ્રમાણે જે રકમ થાય તેટલી રકમ દર વરસે વીમો ઉતરાવનાર જીવે ત્યાં સુધી આપવી પડેછે. જો એકવાર પણ ન આપે તો પહેલાં આપેલા રૂપિઆ નકામા જાયછે: તેમજ જીંદગીના વીમામાં દર વરસે જે રકમ આપવાની ઠરે તે

રકમ વીમો ઉતરાવ્યા પછી તરતજ આપવી પડેછે, ને તે પછી દર વરસે આપવી જોઇએ છીએ. જેમકે ૧૦૦૦ રૂપિઆનો સેંકડે ૫ ટકા પ્રમાણે જીંદગીનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૫૦ રૂપીઆ પ્રથમજ આપવા પડે, ને તે પછી દરવરસે તે જીવે ત્યાંસુધી ૫૦ પચાસ રૂપીઆ આપવા પડે. બાદ તે મરી જાય ત્યારે તેના વારસને વીમાવાળા રૂ ૧૦૦૦) આપે. એટલે ઉપલાજ હિસાબમાં વીમો ઉતરાવનાર વીશ વરસ કરતાં વધારે જીવે તો તેને નુકશાન થાય ને પાંચ દશ વરસમાં મરી જાય તો વીમો ઉતારનારને નુકશાન ખમવું પડે.

માલના વીમામાં જેમ સો રૂ. ને માસે વીમા ખર્ચ ઠરાવ પ્રમાણે આપવાનું હોયછે તેમ આડત, કમીશન કે દલાલી પણ સોના માલ ઉપરજ આપવાની હોય છે.

લોન અને શેર.

અમુક મુદતે પાછા આપવાની સરતે અમુક વ્યાજે રૂપિઆ લેવા તે લોન. તે મુદત પુરી થતા સુધી લોનના રૂપીઆ પાછા મળતા નથી પણ માત્ર વ્યાજ મળેછે. એવી રીતે ઘણું કરીને રાજા કે મ્યુનિસિપાલીટી કરજ કરેછે. લોનના રૂપીઆ મળતા નથી, પણ લોન વેચી શકાય છે. કરજ કરનારની સ્થિતિ પ્રમાણે લોનનો ભાવ ઉપર કે અંદર હોયછે, એટલે હલકી સ્થિતિ હોય તો સોની લોનનો ભાવ સોની અંદર અને સારી સ્થીતિ હોય તો સો ઉપર ભાવ હોય છે. જેટલો ભાવ સેંકડે ઓછો હોય તેટલું સેંકડે ડિસકોંટ કહેવાયછે, ને જેટલો ભાવ સેંકડે વધારે હોય તેટલું પ્રિમિઅમ કહેવાય છે.

કોઈ મોટું કામ કરવાને જ્યારે એક જણ માથે લેઇ શકતો

નથી ત્યારે તે કામમાં જેટલી રકમ જોઇએ, તેના સો સોના કે બસેં બસેં કે તેથી વધારે રકમના ભાગ કરીને તે રકમ ઘણા જણ વચ્ચે એકઠી કરેછે, એ દરેક ભાગને શેર કહેછે, ને શેર રાખનારા કે ખરીદનારાને ભાગીદાર કે શેર હોલ્ડર કહેછે દરેક શેર સોની અંદરનો, સોનો કે તેથી વધારે હોય છે. તે શેરો તે કામની જરૂરીઆત ને ઉપજ ઉપર ગણતરી કરીને લોકો પોતાના ગજ્ઞ પ્રમાણે ખરીદ કરેછે. એ શેરના રૂપીઆ મળતા નથી પણ તે કામમાં નફો થાય તેમાંથી શેર પ્રમાણે વેંહેચણી કે નફાનો હિસ્સો મળેછે. પણ લોનની માફક શેર પણ બજારમાં વેચી શકાય છે ને તેના ભાવમાં પણ ડિસકૌંટ કે પ્રિમિયમ હોયછે. લોન ને શેરની રીત આપણા દેશમાં નવી દાખલ થવાથી અને ગુજરાતના ઘણા ભાગના લોકો એ રીતથી અજાણ્યા હોવાથી એ બંને રીતના હિસાબ સમજવા બહુ મુશ્કેલ જણાયછે.

જો ૧૪ ડિસકૌંટ હોય તો સોની લોનનો ભાવ ૮૬ જાણવો એટલે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે હજારની લોન લે તો ૮૬૦ રૂપીઆ રોકડા આપવા પડે. તેમજ ૧૦ ટકા પ્રિમિઅમે ૨૫૦ નો એક એવા શેર લે તો દરેક શેરના સેંકડે ૧૧૦ એટલે રૂ ૨૫૦ ના રૂ ૨૭૫ આપવા પડે, માટે એવા ચાર શેર લેતો રૂપીઆ ૧૧૦૦ રોકડા આપવા પડે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે આવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય.

તેમજ ૮૬ ને ભાવે ૪ ટકાની ૧૦૦૦ ની લોન લે તો રૂ૮૬૦ આપવા પડે, પણ તેનું વ્યાજ લોન ચાર ટકાનીછે માટે ૧૦૦ ની લોનના અથવા ૮૬ રોકડા રૂપિઆના ચાર રૂપિઆ વ્યાજ આવે માટે ૧૦૦૦ ની લોનના અથવા ૮૬૦ રોકડા રૂપીઆના ૪૦ રૂપી-

આ વ્યાજના આવશે.

લોનનું વ્યાજ-હિસાબ ગણવામાં દર વરસનું અને શેરનો નફો પણ દર વરસનો ગણાયછે. ઉપલાજ હિસાબમાં એમ કહ્યું હોય કે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે ૮૬૦ રૂપિઆ રોકડાની કેટલી લોન આવશે એટલે ૮૬ ને ભાવે ૧૦૦ ની લોન આવેછે એમ જાણવું તેથી ૮૬૦ રૂપીઆની ૧૦૦૦ ની લોન આવે એ ત્રિરાશીથી માલમ પડશે.

પણ જો અમુક રકમ વ્યાજ ઉપજાવવાને કેટલી લોન લેવી અથવા કેટલા રોકડાની લોન લેવી એમ કહે તો—જેમકે ૪૦ રૂપીઆ દર વરસે વ્યાજ ઉપજાવવાને ૮૬ ને ભાવે ચાર ટકાની કેટલી લોન લેવી એટલે ૧૦૦ ની લોનનું ૪ ટકા વ્યાજ આવેછે, માટે ૪૦ વ્યાજ ઉપજાવવાને ૧૦૦૦ની લોન લેવી, પણ ૮૬ નો ભાવ છે માટે ૧૦૦૦ ની લોનના રૂ ૮૬૦ રોકડા આપવા જોઇએ, ને ૪ ટકાની લોનછે માટે દર વરસે રૂ ૪૦) વ્યાજ આવવાનું.

અમુક જાતની લોનોની પેદાશ બરાબર બીજી જાતની લોનો લેવાને કેટલા રોકડા રૂપિઆ જોઇએ, એમ કહે તો ચાર ટકાની ૧૦૦૦ ની લોન જેટલું વ્યાજ આવવાને, પાંચ ટકાની કેટલી લોન લેવી એમ કહ્યું હોય તો ૪ ટકાની ૧૦૦૦ ની લોનનું વ્યાજ રૂ ૪૦ આવે માટે ૫ ટકાની લોનનું રૂ ૪૦ વ્યાજ ઉપજાવવાને ૮૦૦ ની લોન લેવી જોઇએ, પણ એ બીજી જાતની લોનો લેવાને રોકડા કેટલા જોઈએ એમ માગ્યું હોય તો—જો એ લોનનો ભાવ ૧૧૦ હોય તો ૮૦૦) ની લોનના રૂ૮૮૦ રોકડા આપવા જોઇએ.

જો ચાર ટકાની લોન ૮૦ ને ભાવે લેતાં સેંકડે શું વ્યાજ પડશે એમ કહ્યું હોય તો ૮૦ રોકડાનું વ્યાજ ચાર ટકા તો સો રોકડાનું

વ્યાજ પાંચ રૂપિઆ આવે. પણ ઘણી જાતની લોનોમાંથી કઈ જાતની લોનો લેવાથી ફાયદો થશે એમ કહાડવું હોય તો, બધી લોનોનુ સેંકડે કેટલું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડી જેનું વધારે વ્યાજ આવે તે લેવાથી ફાયદો જાણવો.

એક જાતની લોન વેચીને તેના જે ઉપજે તેની બીજી જાતની લોન લેવી હોય તો પ્રથમની લોનનું જે ઉપજે તેટલાની બીજી જાતની લોન કેટલી આવશે તે કહાડવું. તેમજ તેનું શું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડવું હોય તો તે લોનના દર પ્રમાણે તેટલી લોનનું વ્યાજ કહાડવું. એ લોનથી નફો ટોટો કહાડવો હોય તો પહેલી લોનનું જે વ્યાજ ઉપજતું તેને બીજીવારની લોનનું જે વ્યાજ ઉપજશે તે એનો મુકાબલો કરવાથી માલુમ પડશે. પણ જો અમુક દરની લોન શા ભાવે લેવાથી સેંકડે અમુક વ્યાજ ઉપજે એમ કહ્યું હોય તો, એટલે ૪ ટકાની લોન શા ભાવે લેવી કે સો રૂપીએ પાંચ વ્યાજ પડે એમ કહ્યું હોય તો, ચાર ટકાની લોન ૮૦ ને ભાવે લેવાથી સો રૂપીઆનું વ્યાજ પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે, કેમકે ૮૦ ને ભાવે ૧૦૦ રૂપિઆની લોન ૧૨૫ની આવશે તેથી તેનું વ્યાજ ચાર ટકા લેખે પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે. આ બધી રીતોનાં પ્રમાણ ત્રીરાશી જેવાંજ છે માટે તે માંડી બતાવ્યાં નથી—શેરના હિસાબ પણ લોનના જેવાજછે, માટે તે વિષે જુદી રીત લખી નથી.

નફો તોટો.

કોઇ વેપારમાં મુડી અથવા મૂળ બેઠક કે ખરીદી કરતાં જેટલા વધારે ઉપજે તેટલો નફો ને જેટલા ઓછા ઉપજે તેટલો તોટો કહેવાય. નફો તોટો ખરીદી કે બેઠકના સેંકડા ઉપર ગણાય છે. જે-

મકે ૫૦૦ રૂપિઆના માલના ૬૦૦ ઉપજ્યા ત્યારે સેંકડે કેટલો નફો, તો ૫૦૦ ઉપર ૧૦૦ રૂપિઆ નફો થયો માટે સેંકડે ૨૦ રૂપિઆ નફો જાણવો. પણ બે રૂપિએ લીધેલો માલ અઢી રૂપિએ વેચે તો સેંકડે ૧૨૫ રૂપિઆ ઉપજે એટલે ૨૫ રૂપિઆ સેંકડે નફો થાય. પણ એમ કહે કે ૫ રૂપિએ લીધેલો માલ સેંકડે ૨૦) રૂપિઆ નફો મેળવવાને કેટલે વેચવો તો સોના(૧૨૦) ઉપજાવવાછે, માટે ૫ રૂપિઆના કેટલા રૂપિઆ ઉપજાવવા તો ૬ રૂપિઆ આવે. વળી ૬ રૂપિએ કોઇ માલ સેંકડે ૨૦ રૂપિઆ નફો લઇ વેચ્યો હોય તો તે કેટલે ખરીદ કરેલો એમ કહે તો ૧૦૦ રૂપિઆના ૧૨૦ ઉપજાવ્યા છે તો ૬ રૂપિઆ કેટલાના માલના ઉપજેલા તે કહાડવાથી ૫ રૂપિઆ આવશે. તેમજ ચાર રૂપિએ કોઈ માલ વેચ્યાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ ગઇ તો ખેઠક કેટલી. એમ કહાડવું હોય તો ૧૦૦ના માલના ૮૦ ઉપજે એ રીતે એ માલ ચાર રૂપીએ વેચ્યોછે, માટે તે માલ પાંચ રૂપિએ લીધેલો જાણવો. વળી જો એમ કહેકે એક ઘોડો ૫૦ રૂપિએ વેચવાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ જાય તો સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવાને કેટલે વેચવો. એમ કહે તો જ્યારે ૨૦ ટકા ખોટ જાય છે, એટલે ૧૦૦ના ૮૦ ઉપજે છે ત્યારે તે ઘોડો ૬૨॥ રૂપિઆનો હોવો જોઇએ ને તે ઉપર સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવો છે એટલે ૧૦૦ના ૧૨૦ ઉપજાવવા છે, માટે ૬૨॥ના ૭૫ ઉપજાવવા જોઇએ. આ ઉપરથી માલમ પડશેકે ઉપરના બધા હિસાબ ત્રીરાશીથી થશે.

પ્રમાણ ભાગ.

એક આપેલી સંખ્યાના બીજી આપેલી સંખ્યાઓની સાથે પ્રમાણમાં થાય એવા ભાગ કરવા તે પ્રમાણ ભાગ આ ત્રીરાશી પ્ર-

માણુ જેવુંજ છે. કેમકે ૪૦ રૂપિઆના ચાર ભાગ એવી રીતે કરવા કે તે ૨–૪–૬–૮ ની સાથે પ્રમાણુમાં થાય. તેા ૨, ૪, ૬, ૮ મળીને ૨૦ થાય છે, માટે ૨૦ રૂપિઆ હેાય તેા પહેલેા ભાગ ૨, બીજો ૪, ત્રીજો ૬; ચેાથેા ૮ રૂપિઆનેા થશે. તેા ૪૦ રૂપિઆ છે, ત્યારે ત્રીરાશી રીતે કરવાથી ૨૦ : ૪૦ :: પહેલેા ભાગ ૨ : ૪ પહેલેા ભાગ.

એજ. રીતે ૨૦ : ૪૦ :: બીજો ભાગ ૪ : ૮ બીજો ભાગ.

એ પ્રમાણે બાકીના ભાગ પણ આવશે, ઉપર પ્રમાણે કરવાનું કારણ એ કે ૪૦ રૂપિઆના ૨૦ સરખા ભાગ કરીએ તેા દરેક બએ રૂપિઆનેા થાય, માટે તેવા બે ભાગ તે ૪, ચાર ભાગ ૮, ૭ ભાગ ૧૨ ને ૮ ભાગ ૧૬ રૂપિઆ થાય.

પંત્યાળું.

બે કે તેથી વધારે ભાગીદારોએ કરેલા સહીઆરા વેપારમાં થયેલેા નફેા અથવા તેાટેા વહેંચી લેવાની રીતને પંત્યાળું કહે છે. ભાગીદારોએ આપેલા રૂપિઆ સરખી મુદત સુધી રહ્યા હેાય તેા તેને એકવડું અને ભાગીદારોના રૂપિઆ ને મુદત વધતી ઓછી હેાય તેા તેને બેવડું પંત્યાળું કહે છે. એકવડા પંત્યાળાના હિસાબ પ્રમાણુ ભાગની રીતે ત્રીરાશીથી થાય છે. કેમકે તેમાં રૂપિઆના પ્રમાણુમાં નફેા વહેંચી લેવાનેા હેાય છે. અથવા સરખા રૂપિઆ દરેકે આપ્યા હેાય ને મુદત જૂદી જૂદી હેાય તેા મુદતના પ્રમાણુમાં નફેા વહેંચી લેવાનેા હેાય છે, **અ** એ ૪૦૦ **બ** એ ૬૦૦ રૂપિઆ આપી વેપાર કર્યો તેમાં ૧૦૦ રૂપિઆ નફેા થાય તેા એ નફેા કુલ ૧૦૦૦ રૂપિઆ ઉપર થયેા તેમાં **અ** ના ૪૦૦ છે માટે ત્રીરાશી રીતે **અ** ના ૪૦ ને **બ** ના ૬૦૦ રૂપિઆ છે માટે ૬૦ રૂપિઆ નફેા મળશે. તેજ

પ્રમાણે **અ**એ ને **બ**એ ૧૦૦૦ રૂપિઆ સરખે ભાગે કાઢી વેપાર કર્યો તેમાં **અ** ના ૬ માસ ને **બ** ના ૧૨ માસ રૂપિઆ રહ્યા હોય ને ૧૮૦ રૂપિઆ નફો થયો હોય તો ૧૦૦૦ રૂપિઆ ૧૮ મહિના રહેવાથી ૧૮૦ નફો થયો ગણાય, માટે ૬ માસવાળાને ત્રીરાશી રીતે ગણ્યાથી ૬૦ ને બાર માસવાળનો ૧૨૦ રૂપિઆ નફાના આવશે, પણ બેવડા પંત્યાળાગાં રૂપિઆને મહિના જૂદા જૂદા હોવાથી રૂપિઆને મહિનાના પ્રમાણમાં નફો વહેંચવાનો હોય છે, જેમકે **અ** ના ૪૦૦ રૂપિઆ ૬ માસ ને **બ** ના ૮૦૦ રૂપિઆ ૪ માસ રહ્યા હોય ને ૫૬૦ રૂપિઆ નફો થયો હોય તો **અ** ના ૪૦૦×૬ =૨૪૦૦ રૂપિઆ એક માસ અને **બ** ના ૮૦૦×૪=૩૨૦૦ રૂપિઆ એક માસ રહ્યા હોય તેવું થયું. માટે કુલ ૫૬૦૦ રૂપિઆ એક માસ રહ્યા ને તેમાં ૫૬૦ રૂપિઆ નફો થયો છે તેથી ૨૪૦૦ રૂપિઆ વાળાને પ્રમાણ રીતે ૨૪૦ ને ૩૨૦૦ રૂપિઆ વાળાને ૩૨૦ રૂપિઆ નફાના આવશે. ઉપરની રીતથી પંત્યાળાનું કારણ સમજાશે.

ઇષ્ટરાશિ.

ઇષ્ટરાશિ બે પ્રકારની છે. એકવડી ને બેવડી. જેમાં એકવાર ખોટો જવાબ ધારીને હિસાબમાં કહેલા સંકેત પ્રમાણે કરી ખરો જવાબ કહાડવાનો હોય છે, તેને એકવડી ઇષ્ટરાશિ કહે છે. એકવડી ઇષ્ટરાશિના દાખલામાં જવાબને કોઇ સંખ્યાએ ગુણવાનું અથવા ભાગવાનું કે તેનો કોઇ ભાગ વત્તો અથવા ઓછો કરવાનો હોય છે, એટલે કોઇ આપેલા ગુણોત્તરમાં જવાબ વધે અથવા ઘટે છે.

રીત-એક ખોટો જવાબ ધારી હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે તેને ગુણવા અથવા ભાગવા ને તેથી જે ફળ આવે તેઃ હિસાબમાં સા-

થી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તે:: ધારેલી ખોટી સંખ્યા: જવાબ. આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી જવાબ કાઢવો; આ ઉપરથી માલુમ પડશે કે એકવડી ઈષ્ટરાશિના દાખલા તે પ્રમાણ ભાગના દાખલાની રીતેજ થાય છે.

ઇષ્ટરાશિનું કારણ-પ્રમાણમાં પહેલું પદ બીજા પદ સાથે જે પ્રમાણમાં હોય તેજ પ્રમાણમાં ત્રીજું પદ, ચોથા પદ સાથે હોવું જોઇએ, તેમ ઇષ્ટરાશિમાં પણ ખોટી સંખ્યા જે પ્રમાણમાં જવાબની સાથે હોયછે તેજ પ્રમાણમાં ખોટી સંખ્યાનો કોઈ ભાગ, જવાબના તે ભાગની સાથે હોય છે. તેમજ ખોટી સંખ્યા ખરી સંખ્યા સાથે જે પ્રમાણમાં રહે છે તેજ પ્રમાણમાં તેમાં તેનો કોઇ ભાગ ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ ત પણ રહે છે. જેમકે ખરી સંખ્ય ૧૬ હોય ને ખોટી સંખ્યા ૪ ધારી તો ૧૬ ને ૪ જે પ્રમાણમાં છે તેજ પ્રમાણમાં ૧૬ ના ને ૪ ના બમણા કે બીજો ભાગ પણ રહેશે. તે નીચે પ્રમાણે.

ખો. સં. ના બમણા ૮: ખ. સં.ના બમણા ૩૨:: ૪ ખો. સં. :૧૬ જ.
" " નો બી. ભા. ૨: " " નો બી. ભા. ૮ :: ૪ " " :૧૬ જ.

ખોટી સંખ્યાંમાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૬ ને ખરી સખ્યામાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૨૪ થાય છે માટે–૬: ૨૪::૪ ખોટી સંખ્યા : ૧૬ જ. તેમજ ખોટી સંખ્યામાંથી તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યો તો ૨ ને ખરી સંખ્યામાંથી તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યો તો ૮ રહેછે માટે–૨: ૮:: ૪: ૧૬. બેવડી ઇષ્ટરાશિમાં બેવાર ખોટા જવાબ ધારીને સંકેત પ્રમાણે ગણવાનું હોય છે. તેની બે રીત છે.

૧ લી રીત–આ હિસાબમાં ખરી સંખ્યાને સંકેત પ્રમાણે

ગણુવાથી શું ફળ આવશે તે કહેલું હોય છે. માટે પ્રથમ એક સંખ્યા ધારી તે ઊપરથી સંકેત પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી હિસાબમાં ખરા જવાબનું જે ફળ આપ્યું હોય તે એની બાદબાકી કરવી. જો ખરા જવાબના ફળ કરતાં ધારેલી સંખ્યાનું ફળ ઓછું હોય તો જેટલું ઓછું હોય ત્યાં આગળ ઓછાનું (−) ચિન્હ કરવું. ને વત્તું હોય તો (+) વત્તાનું ચિન્હ કરવું. એજ રીતે બીજીવાર બીજી સંખ્યા ધારી સંકેત પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી આપેલા ફળ સાથે સરખાવી વત્તા કે ઓછાનું ચિન્હ કરવું. પછી પહેલી ધારેલી સંખ્યાનો ને બીજી ધારેલી સંખ્યાના ફળની બાદબાકીનો ગુણાકર કરવો. તથા બીજી ધારેલી સંખ્યાનો ને પહેલી ધારેલી સંખ્યાના ફળનો ગુણાકાર કરવો. હવે જો ફળોની બાદબાકીના ચિન્હ સજાતિય હોય તો આ ગુણકારોની બાદબાકો, ને વિજાતિય ચિન્હ હોય તો સરવાળો કરી તે સરવાળને કે બાદબાકીને ફળોના સરવાળાએ કે બાદબાકીએ ભાગવાથી જવાબ આવશે.

કારણ-ઇષ્ટરાશિનું કારણ સમજવાને અંકગણિતના કેટલાક નિયમો કે પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો જાણવાં જોઈએ. એમાંના કેટલાક પાછળ આવી ગયા છે. તો પણ તે આ ઠેકાણે જરૂરના હોવાથી ફરીને લખ્યા છે.

૧ ખોટી ધારેલી સંખ્યા, ખરી સંખ્યા અથવા જવાબ કરતાં નાની હોય તો ખરી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તે કરતાં ખોટી સંખ્યાનું ફળ ઓછું આવશે, ને તેથી ફળોની બાદબાકી આગળ ઓછાનું ચિન્હ કરવું પડશે. પણ જો ધારેલી સંખ્યા જવાબ કરતાં મોટી હશે તો ધારેલી સંખ્યાનું ફળ જવાબના ફળ કરતાં મોટું આવશે. તેથી બંને ફળોની બાદબાકી આગળ વત્તાનું ચિન્હ આવશે.

૨ પહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે, તેમ પહેલી ફળોની બાદબાકી તે બીજી ફળોની બાદબાકીને છે. અથવા પેહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ તેના ફળની બાદબાકીને છે તેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી તે તેના ફળની બાદબાકીને છે.

૩ બંને ફળોની બાદબાકી સજાતિય હશે તો—એ બે ફળોની બાદબાકીની બાદબાકી જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે, તેમ બેમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કહાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે. પણ જો ફળોની બાદબાકી વિજાતિય હશે તો-એ બે બાદબાકીનો સરવાળો જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે તેમ એ બેમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કહાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે.

૪ ચાર પદો પ્રમાણુમાં હોય તો પહેલા ને બીજાનો ભાગાકાર તે, ત્રીજા ને ચોથાના ભાગાકારની બરોબર છે.

૫ બે બરાબરનાં પદોમાં બરાબર સંખ્યા ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ તો તે સરવાળો અથવા બાદબાકી બરાબર રહેશે.

૬ બે અપૂર્ણાંક બરાબર હોય તો પહેલા અપૂર્ણાંકના અંશ જેમ બીજા અપૂર્ણાંકના અંશને છે, તેમ પહેલાનો છેદ તે બીજાના છેદને છે.

આ બધા નિયમો તથા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો દાખલો લીધાથી તરત

ધ્યાનમાં આવશે માટે એક દાખલો લઇએ. જેમકે તે સંખ્યા કયી છે કે જેમાંથી વીસ બાદ કરી ચારે ભાગી ૩૦ ઉમેરીએ તો સરવાળો ૫૦ થાય છે. આ દાખલામાં જવાબ ૧૦૦ આવશે. હવે હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે સંખ્યા ધારી ફળ ઉત્પન્ન કરવા પ્રથમ ૪૦ અને ફરી ૧૪૦ સંખ્યાઓ ધારી તો પહેલી ધારેલી સંખ્યા ઓછી છે માટે.

૪૦	૧૪૦
૨૦	૨૦
૪)૨૦	૪)૧૨૦
૫	૩૦
૩૦	૩૦
૩૫	૬૦
૫૦	૫૦
−૧૫	+૧૦

(૧) ફળોની બાદબાકી ૧૫ ઓછી આવી અને બીજી ધારેલી સંખ્યા જવાબ કરતાં મોટી છે માટે ફળોની બાદબાકી ૧૦ વત્તી આવી.

(૨) નીયમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડયું તો ૬૦:૪૦::૧૫:૧૦
અથવા બીજી રીતે માંડયું તો ૬૦:૧૫::૪૦:૧૦

(૩) ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે ફળોની બાદબાકી ને સજાતિય ચિન્હ લાવવાને પહેલી ૪૦ અને ૬૦ સંખ્યા ધારી તો ૪૦ ઉપરથી ફળોની બાદબાકી−૧૫ અને ૬૦ ઉપરથી ફળોની બાદબાકી —૧૦ આવશે. તે ઉપરથી પ્રમાણ માંડયું તો......................... ......૫:૨૦::૧૫:૬૦ તેમજ ૪૦ ને ૧૪૦ ના ફળોની બાદબાકી વિજાતિય છે માટે તે ઉપરથી પ્રમાણમાંડયું તો...૨૫:૧૦૦::૧૫:૬૦

ટીકા—ઉપર માંડી બતાવેલાં બધાં પ્રમાણો ખરાં છે. કેમકે પ્રમાણમાં કહેલા નિયમ પ્રમાણે તેમાંના આદિ ને અંત પદોનો ગુણાકાર તે વચલાં બે પદોના ગુણાકારની બરોબર છે અને તેથી એ ત્રણે

નિયમો ખરા છે એવું સમજાશે.

(૪) આ નિયમ સમજાવવાને ઉપરનું છેલ્લું પ્રમાણ ૨૫:૧૦૦ ::૧૫:૬૦ લીધું તો $\frac{૨૫}{૧૦૦}=\frac{૧૫}{૬૦}$ છે.

(૫) ઉપરના બે બરાબર પદમાં ચાર ઉમેરીશું તો $\frac{૨૫}{૧૦૦}+૪=\frac{૧૫}{૬૦}+૪$ અથવા $\frac{૪૨૫}{૧૦૦}=\frac{૨૫૫}{૬૦}$ એ બરાબર છે. તેમજ બંનેમાંથી $\frac{૧}{૮}$ બાદ કર્યાથી પણ બાદબાકી બરાબર થશે.

(૬) $\frac{૨૫}{૧૦૦}=\frac{૧૫}{૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડીશું તો ૨૫:૧૫::૧૦૦:૬૦ આ પ્રમાણે થશે ને તે પ્રમાણ પણ ખરૂંજ છે.

ઉપરના નિયમો બરાબર ધ્યાનમાં રાખ્યાથી ઈષ્ટરાશિનું કારણ સમજાશે. માટે એક દાખલો રીત પ્રમાણે આ ઠેકાણે ગણી બતાવ્યોછે, પ્રથમ ૪૦ ધાર્યા તો ૪૦ બીજીવાર ૧૪૦ ધાર્યા તો ૧૪૦

૨૦	૨૦
૪)૨૦	૪)૧૨૦
૫	૩૦
૩૦	૩૦
૩૫	૬૦
૫૦	૫૦
−૧૫	+૧૦

વિજાતિય ચિન્હ છે માટે

$$જવાબ=\frac{૪૦\times૧૦+૧૪૦\times૧૫}{૧૫+૧૦}=\frac{૨૫૦૦}{૨૫}=૧૦૦$$

આ હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી તેની ને આ-

પેલા ફળની બાદબાકી ઉત્પન્ન કરી છે. હવે ૪૦ ને ૧૦ નો ને ૧૪૦ ને ૧૫ નો ગુણાકાર કરી તેના સરવાળાને ૧૦ ને ૧૫ ના સરવાળાએ ભાગ્યાથી શા માટે જવાબ આવ્યો તેનું કારણ તપાસીએ.

પાછળ કહેલા ત્રીજા નિયમમાં કહ્યું છે કે ફળોની બાદબાકીનાં ચિન્હ વિજાતિય હોય તો તે બંને બાદબાકીઓનો સરવાળો : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: બેમાંની એક બાદબાકી તે : તે બાદબાકી જે ધારેલી સંખ્યા ઉપરથી કહાડી છે તેની ને જવાબની બાદબાકીને. એટલે આ હિસાબમાં ૧૫+૧૦:૧૪૦−૪૦::૧૫: જવાબ−૪૦ આ પ્રમાણે પ્રમાણ થયું. તેથી આદિ અંતનો ગુણાકાર તે વચલાં બે મધ્ય પદોના ગુણાકારની બરોબર છે માટેઃ—

(૧૫+૧૦) (જવાબ—૪૦)=(૧૪૦−૪૦)×૧૫ તેથી ૧૫ ×(જવાબ−૪૦)+૧૦ (જવાબ−૪૦)=૧૪૦×૧૫−૪૦×૧૫ તેથી ૧૫ ×જવાબ−૧૫×૪૦+૧૦×જવાબ−૧૦×૪૦=૧૪૦×૧૫−૪૦×૧૫ આ બંને બરાબર છે તેથી−૧૫×૪૦ બંને તરફથી કહાડી નાંખ્યા તોઃ—

૧૫ ×જવાબ + ૧૦ × જવાબ−૧૦×૪૦=૧૪૦×૧૫ બરાબર રહ્યા. તેમાં ૧૦×૪૦ બંને તરફ ઉમેર્યા તો ૧૫×જવાબ+૧૦×જવાબ= ૧૪૦×૧૫ + ૧૦ × ૪૦ થયા કેમકે ડાબી બાજુમાં ૧૦ × ૪૦ ઓછા હતા ને એટલાજ વત્તા આવ્યા એટલે આવ્યા તેટલા ઓછા કરવાના હતા તેથી બરાબર થઇ રહ્યા ને જમણી બાજુમાં ૧૦×૪૦ વધ્યા. માટે ૧૫ × જવાબ + ૧૦ × જવાબ=૨૫ જવાબ=૧૪૦×૧૫ + ૪૦ × ૧૦ થયા તેથી બંને તરફ ૨૫એ ભાગ્યા તો જવાબ = $\frac{૧૪૦×૧૫+૪૦×૧૦}{૨૫}$ આ ઉપરથી પ્રથમ કરેલી રીત કેમ થઇ તે સમજાશે.

સજાતિય ચિન્હ આવે માટે એજ દાખલો ફરી કર્યો તોઃ—

પ્રથમ ૧૨૦	૧૪૦ બીજીવાર ધાર્યા	
૨૦	૨૦	
૪)૧૦૦	૪)૧૨૦	આ સજાતિય ચિન્હ છે
૨૫	૩૦	માટે રીત પ્રમાણે કર્યા તો
૩૦	૩૦	જવાબ= $\frac{૧૨૦\times૧૦-૧૪૦\times૫}{૧૦-૫}$ =૧૦૦
૫૫	૬૦	
૫૦	૫૦	
+૫	+૧૦	

આ રીતનું કારણ—ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે ૧૦-૫ઃ ૧૪૦—૧૨૦ ::૫:૧૨૦- જવાબને. તેથી આદિ અંતનો ગુણાકાર વચલાં બે પદોના ગુણાકારની બરાબર છે.

(૧૦—૫) (૧૨૦-જવાબ)=(૧૪૦-૧૨૦)×૫ અથવા ૧૦ (૧૨૦ —જવાબ)—૫(૧૨૦—જવાબ)=૧૪૦×૫—૧૨૦×૫ અથવા ૧૦ ×૧૨૦—૧૦×જવાબ—૫×૧૨૦×૫×જવાબ=૧૪૦×૫—૧૨૦×૫

બંને તરફથી—૫×૧૨૦ બાદ કર્યા તો ૧૦×૧૨૦-૧૦×જવાબ×૫ ×જવાબ=૧૪૦×૫

અથવા ૧૦×૧૨૦—૧૦ જવાબ×૫ જવાબ=૧૪૦×૫

અથવા ૧૦×૧૨૦—૫ જવાબ=૧૪૦×૫

બંને તરફથી ૧૪૦×૫ બાદ કર્યા તો ૧૦×૧૨૦—૫ જવાબ -૧૪૦×૫=૦

બંને તરફ પાંચ ઉમેર્યા તો ૧૦×૧૨૦—૧૪૦×૫=૫ જવાબ.

બંને તરફ પાંચે ભાગ્યા તો $\frac{૧૦\times૧૨૦-૧૪૦+૫}{૫}$=જવાબ. આ ઉપરથી ઉપરની રીતનું કારણ સમજાશે.

બીજી રીત.—બે વાર સંખ્યાઓ ધારી ઉપર પ્રમાણે ફળો-ની બાદબાકી કરવી. પછી બાદબાકીઓનાં ચિન્હ સજાતિય હોય તો બંને બાદબાકીઓની બાદબાકી : બને ધારેલી સંખ્યા બાદબાકીને :: બેગાંની એક બેગાંની એક બાદબાકી :તે બાદબાકીવાળી સંખ્યા–જવાબને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી ગણવા. જે જવાબ આ-વશે તે ધારેલી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકી આવશે, માટે ધારેલી સંખ્યામાંથી તે બાદ કર્યાથી જવાબ આવશે. જેમકે ઉપરનો દા-ખલો લીધો તોઃ—

૧૨૦	૧૪૦
૨૦	૨૦
૪)૧૦૦	૪)૧૨૦
૨૫	૩૦
૩૦	૩૦
૫૫	૬૦
૫૦	૫૦
+૫	+૧૦

ઉપરની રીતે પ્રમાણ માંડયું તો ૧૦—૫:૧૪૦—૧૨૦::૫:૧૨૦–જવાબ. તેથી બીજા ને ત્રીજા પદના ગુણાકારને આદિ પદે ભા-ગ્યા તો અંતપદ આવશે એટલે=

$(\frac{૧૪૦-૧૨૦}{૧૦-૫})\times૫=૨૦$

ચોથું પદ આવ્યું. તે ૧૨૦-જવાબ છે માટે જવાબ=૧૨૦-૨૦=૧૦૦

ઉપરની બીજી રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્ર-માણ બાંધ્યું તો ૧૦:૫::૧૪૦–જવાબ : ૧૨૦–જવાબ. આ પ્રમાણે

પ્રમાણ થયું. તેથી ચોથા નિયમ પ્રમાણે $\frac{૧૦}{૫}=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ}}{૧૨૦-\text{જવાબ}}$ બંને બરાબરની બાજુમાંથી ૧ બાદ કીધો તો $\frac{૧૦}{૫}-૧=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ}}{૧૨૦-\text{જવાબ}}-૧$

સમચ્છેદ કર્યા તો $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{(૧૪૦-\text{જવાબ})-(૧૨૦-\text{જવાબ})}{૧૨૦-\text{જવાબ}.}$

અથવા $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{૧૪૦-\text{જવાબ}-૧૨૦+\text{જવાબ}.}{૧૨૦-\text{જવાબ}}$

જમણી બાજુના અંશમાં એકવાર જવાબ ઓછો ને એકવાર વત્તા છે માટે બંને ઉડી ગયાથી $\frac{૧૦-૫}{૫}=\frac{૧૪૦-૧૨૦}{૧૨૦-\text{જવાબ}}$ તેથી છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તોઃ ૧૦-૫:૧૪૦-૧૨૦::૫:૧૨૦-જવાબ. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ આ રીતે ઉત્પન્ન થયું છે.

જો વિજાતિય ચિન્હ હોય તો બંને બાદબાકીઓનો સરવાળો : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: એમાંની એક બાદબાકી : બાદબાકી વાળી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકીને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ કરી ઉપરની રીત પ્રમાણે ગણી જવાબ કહાડવો. એટલે પ્રથમનો દાખલો લઇ

૪૦	૧૪૦
૨૦	૨૦
૪)૨૦	૪)૧૨૦
૫	૩૦
૩૦	૩૦
૩૫	૬૦
૫૦	૫૦
-૧૫	+૧૦

પ્રમાણ બાંધ્યું તોઃ—
૧૫+૧૦:૧૪૦-૪૦::૧૦:૧૪૦-જવાબ.
બીજાને ત્રીજા પદના ગુણાકારને પહેલા પદે ભાગ્યા તો—

$\frac{(૧૪૦-૪૦ \times ૧૦}{૧૫+૧૦}=૧૪૦-\text{જવાબ છે.}$

માટે ૧૪૦-જવાબ=૪૦ આવ્યા.

તેથી ૧૪૦−૪૦=જવાબ. એટલે જવાબ=૧૦૦ આવ્યા.

ઉપરની રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો ૧૫ : ૧૦ :: જવાબ−૪૦ : ૧૪૦−જવાબ.

ચાળીસ જવાબ કરતાં ઓછા છે કેમકે ફળ ઓછું આવ્યું છે માટે જવાબમાંથી ૪૦ બાદ કર્યા. ને ૧૪૦ જવાબ કરતાં વધારે છે કેમકે ફળ મોટુ આવ્યુ છે. માટે ૧૪૦ માંથી જવાબ બાદ કર્યો.

ઉપરના પ્રમાણને ચોથા નિયમ પ્રમાણે લખ્યા તો $\frac{૧૫}{૧૦}=\frac{જવાબ—૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$

બંને બરાબરના પદમાં એક ઉમેર્યા તો $\frac{૧૫}{૧૦}+૧=\frac{જવાબ-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}+૧$

સમચ્છેદ કર્યો તો $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{જવાબ-૪૦+૧૪૦-જવાબ}{૧૪૦-જવાબ}$

જમણી તરફના અંશમાં એકવાર જવાબ વત્તો ને એકવાર ઓછો છે માટે બંને ઉડી ગયા. તેથી $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{-૪૦+૧૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ રહ્યા. અથવા

$\frac{૧૫+૧૦}{૧૦}=\frac{૧૪૦-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ આવ્યા.

તે ઉપરથી છઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો ૧૫+૧૦:૧૪૦−૪૦::૧૦:૧૪૦−જવાબ. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ એ રીતે ઉત્પન્ન થયું છે.

ઘાત પ્રકરણ.

કોઇ સંખ્યા બે વાર મૂકીને તેનો ગુણાકાર કરીએ તે ગુણાકારને તે સંખ્યાનો બે ઘાત કે વર્ગ કહે છે. કેમકે ૫ ને પાંચે ગુણીએ તો ૨૫ આવે. તે પાંચનો બે ઘાત કે વર્ગ કહેવાય. પાંચનો વર્ગ બતાવ-

વાને પાંચને માથે બે લખાય છે. જેમકે $૫^{૨}$. એ બગડાને ઘાત પ્રકાશક કે ઘાત બતાવનાર અંક કહે છે. એજ પ્રમાણે પાંચને ત્રણ વાર મૂકીને અથવા ત્રણ વાર ગુણીએ તેને પાંચનો ત્રણ ઘાત કે ઘન કહે છે. જેમકે ૫×૫×૫=૧૨૫ એ પાંચનો ઘન કહેવાય. પાંચનો ઘન બતાવવાને $૫^{૩}$ પણ લખાય. એજ પ્રમાણે ચતુર્ઘાત પંચઘાતને ગાટ પણ જાણવું.

એકનો કોઇ પણ ઘાત એકજ આવે છે, કેમકે એકેને ગમે તેટલી વારે એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર એકજ રહે છે. પણ અપૂર્ણાંકનો જેમ જેમ ઘાત વધારતા જઇએ તેમ તેમ કીમત ઘટતી જાય છે, કેમકે કોઇ અપૂર્ણાંકને તેજ રકમે ગુણવાથી તેનો ગુણાકાર તેટલા ગણો ઓછો આવેછે.

કોઇ સંખ્યાનો ચતુર્ઘાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને ચાર વાર ગુણવી અથવા વર્ગ કરી તેને વર્ગે ફરીને ગુણવી. જેમકે $૫^{૪}$=૫×૫×૫×૫=૬૨૫ અથવા $૫^{૪}$=૫×૫=૨૫×૨૫=૬૨૫ એટલે ચતુર્ઘાત કરવો હોય તો બે ઘાતને બે ઘાતે ગુણવા. પંચઘાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને પાંચવાર ગુણવી અથવા ઘનને વર્ગનો ગુણાકાર કરવો, જેમકે $૨^{૫}$=૨×૨×૨×૨×૨=૩૨ અથવા $૨^{૩}$=૮ ને $૨^{૨}$=૪ એ બેનો ગુણાકાર ૮×૪=૩૨. એટલે પંચઘાત કરવો હોય તો ત્રણ ઘાતને બે ઘાતનો ગુણાકાર કરવો. તેમજ કોઇ સંખ્યાનો છ ઘાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને છ વાર ગુણવી અથવા ત્રણ ઘાતને ત્રણ ઘાતે ગુણવા અથવા ચાર ઘાતને બે ઘાતે ગુણવા.

આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઇ સંખ્યાના કોઇ

ઘાતનો ને તેજ સંખ્યાનો બીજા કોઈ ઘાતનો ગુણાકાર કરીએ તે ગુણાકાર એ ઘાતોના સરવાળા જેટલો ઘાત થાય. જેમકે $૪^{૫}×૪^{૩}$ એ બેનો ગુણાકાર $૪^{૮}$ થાય. તેમજ $૪^{૨}×૪^{૩}=૪^{૫}$ આવે. ઇત્યાદિ.

કોઇ સંખ્યાનો વર્ગ કરવો હોય તો પાંચ રીત થાયછે.

(૧) તે સંખ્યાને તેજ સંખ્યાએ ગુણવાથી. જેમકે $૫^{૨}=૫×૫=૨૫$

(૨) તે સંખ્યાના બે કે વધારે ભાગ કરી તે દરેક ભાગે આખી સંખ્યા સાથે ગુણી તે ગુણાકારોનો સરવાળો કરવાથી. જેમકે $૧૨^{૨}$ કરવો હોય તો તેના ૧૦ ને ૨ એવા બે ભાગ કર્યા, તો $૧૨^{૨}$ $=૧૦×૧૨+૨×૧૨=૧૪૪$

(૩) તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે દરેક ભાગના વર્ગના સરવાળામાં તે બે ભાગોના ગુણાકારની બમણાઈ ઉમેરવાથી. જેમકે $૧૮^{૨}=૧૦^{૨}+૮^{૨}+૧૦×૮×૨=૩૨૪$

(૪) તે સંખ્યાના અર્ધના વર્ગની ચોગણાઇ બરાબર અથવા તેના ચોથા ભાગના વર્ગની ૧૬ ગણાઈ બરાબર. જેમકે $૮^{૨}=૪^{૨}$ $×૪$ અઅથવા $૨^{૨}×૧૬=૬૪$

(૫) કોઇ મોટી સંખ્યાનો વર્ગ કરવો હોય તો:—તે સંખ્યા લખ્યા પછી તેની નીચે લીટી દોરી એક આડી હારમાં દરેક આંકડાનો વર્ગ લખવો. જે આંકનો વર્ગ એક આંક થાય તેની ડાબી બાજુએ મીડું મૂકી બે આંક પૂરા કરવા. મતલબ કે જેટલા અંકનો વર્ગ કરવો હોય તેથી બમણા આંક થવા જોઈએ. જો સંખ્યામાં મીડું હોય તો તેના વર્ગના સ્થાનને બે મીડાં લખવાં. પછી સંખ્યામાંના મોટા એટલે ડાબા હાથ ભણીના અંકની બમણાઇએ બાકીના આંકડા

સાથે ગુણી તે ગુણાકાર ઉપલા વર્ગ કરેલા આંકડાઓની નીચે, જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હોય તેટલા આંકડા જમણા હાથ તરફના કાપીને લખવો. પછી તેની પાસેના જમણા હાથ ભણીના આંકડાની બમણાઈએ બાકીના જમણા હાથ ભણીના આંકડા સાથે ગુણી જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હોય તેટલા આંકડા કાપી ઉપર પ્રમાણે મૂકવો. પછી તેની પાસેનો જમણા હાથ ભણીનો આંકડો લેઇ બાકીના જમણા હાથ ભણીના આંકડા સાથે ગુણી, ઉપર પ્રમાણે મૂકવો. એ પ્રમાણે દશકના આંકડાની બમણાઇએ કોઇ આંકડા સાથે ગુણવાના નથી, માટે ન ગુણવા. પછી સરવાળો કરવો. એ જવાબ. જેમકે ૧૦૨૩૪૫નો વર્ગ કરવો હોય તોઃ—

૧૦૨૩૪૫ તેમજ ૧૨૫ નો વર્ગ કરવો હોય તો ૧૨૫

```
१०००४०९१६२५
  ४६९०
    १३८०
      २७०
       ४०
१०४७४४९९०२५ જવાબ.
```

```
१०४२५
  ५०
   २०
१५५२५ જ.
```

કારણ—કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ તે, તેનાં દરેક ભાગના વર્ગ વત્તા તે બે ભાગોના ગુણાકારની બમણાઈ બરાબર છે. ૧૨૫નો વર્ગ કરવો હોય તો ૧૦૦+૨૦+૫ એ ત્રણ ભાગ છે, તે દરેક ભાગનો વર્ગ કરી સરવાળો લેઇશું તો ૧૦૦૦૦+૪૦૦+૨૫=૧૦૪૨૫ આવશે. એટલે જે આંકડાનો વર્ગ એક અંક આવે છે તેની પાછળ મીડું આવે છે. આ દાખલામાં બેનો વર્ગ ચાર એક અંક આવ્યો તો તેની

પાછળ મીડું આવ્યું. અને તેથીજ ઉપરનો નિયમ કહાડયો કે જેનો વર્ગ એક અંક આવે તેની પાછળ મીડું મૂકવું. હવે તે ભાગોના ગુણાકારની બમણાઈ ઉમેરવી જોઇએ એટલે સોનો વીશ ને પાંચ સાથે ને વીશનો પાંચ સાથે એમ અરસ્પરસ ગુણાકાર કરી તેની બમણાઇ ઉમેરવી જોઇએ, તેથી સોની બમણાઇ બસેંએ પાંચ સાથે ને વીશ સાથે ગુણ્યા એટલે પાંચ હજાર આવ્યા. પણ સંખ્યા લખવામાં સો ઉપર બે મીડાં આવતાં નથી માટે બે અંક કાપીને ગુણાકાર લખ્યો એટલે એકસોની બમણાઇ બેને પચીસનો ગુણાકાર પચાસ બે અંક કાપીને લખ્યો, તેમજ વીશની બમણાઈનો ને પાંચનો ગુ-ણાકાર બસેં આવ્યો પણ વીશમાં મીડું લખાતું નથી, તેથી બે દ-શકની બમણાઈ ચારનો ને પાંચનો ગુણાકાર વીશ એક અંક કાપીને લખ્યો છે. એમાં બધા અંકોનો અરસ્પરસ ગુણાકાર આવી ગયો. માટે પાંચની બમણાઈએ કોઇ અંક સાથે ગુણ્યા નથી. એ ઉપરથી ઉપરનો નિયમ નીકળ્યો છે.

(૧) કોઇ સંખ્યાનો ઘન કરવો હોય તો તે સંખ્યાને ત્રણ વાર ગુણવી.

(૨) અથવા તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે ભાગોના ઘનના સરવાળામાં તે ભાગોના ગુણાકારની ત્રમણાઇને આખી સંખ્યાએ ગુણી ઉમેરવા.

(૩) અથવા તે સંખ્યાના બંને ભાગોના ઘનમાં પહેલા ભાગના વર્ગની ત્રમણાઇએ બીજા ભાગને અને બીજા ભાગના વર્ગની ત્રમ-ણાઇ એ પહેલા ભાગને ગુણી; એ બંને ગુણાકાર ઉમેરવા.

(૪) પણ જો કાંઇ સંખ્યાના ત્રણ અંક હોય ને તેનો ઘન કરવો હોય તોપણ તેના બે આંકડા પાડવા એટલે એક ભાગમાં બે અંક ને એક ભાગમાં એક અંક રાખી પછી ઉપરની ત્રીજી રીતે ઘન કરવો.

(૫) અથવા જો ત્રણે અંક રાખી ઘન કરવો હોય તો દરેક અંકના ઘનમાં તે દરેક અંકના વર્ગની ત્રમણાઇએ બાકીના અંક સાથે ગુણી તે ગુણાકાર અને તે ત્રણે અંકોના ગુણાકારની છગણાઇ એટલું ઉમેરવું. જેમકે

$૧૨૪=૧૨૦+૪$ એ બે ભાગ લીધા તો ઉપરની ચોથી રીત પ્રમાણે $૧૨૦^{૩}+૪^{૩}+૧૨૦^{૨}\times૩\times૪+૪^{૨}\times૩\times૧૨૦=૧૯૦૬૬૨૪$ અથવા જો ત્રણે અંક રાખી ઘન કરવો હોય તો $૧૨૪^{૩}=૧૦૦^{૩}+૨૦^{૩}+૪^{૩}+૧૦૦^{૨}\times૩\times૨૪+૨૦^{૨}\times૩\times૧૦૪+૪^{૨}\times૩\times૧૨૦+૧૦૦\times૨૦\times૪\times૬=$ ૧૯૦૬૬૨૪ આવશે.

કોઇ સંખ્યા કયી સંખ્યાનો કોઈ ઘાત થએલો છે, તે મૂળ સંખ્યાને તે ઘાત સંખ્યાનું મૂળ કહે છે. જેમકે ૩૬ એ છનો વર્ગ છે, માટે ૩૬ નું છ એ બે ઘાત મૂળ કહેવાય. બે ઘાત મૂળને વર્ગ પણ કહે છે. તેમજ ૬૪ એ ચારનો ઘન છે. માટે ૬૪નો ૪ એ ત્રણ ઘાત મૂળ કે ઘન મૂળ કહેવાય.

કોઈ સંખ્યાનું ઘાતમૂળ બતાવવાને $\sqrt{}$ ચિન્હ કરે છે. ને તેમાં તે ઘાતનો અંક લખેછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $\sqrt[૩]{૬૪}$ આ પ્રમાણે, ને ચતુર્ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $\sqrt[૪]{૬૪}$ લખાય. પણ વર્ગમૂળ બતાવવાને અંદર બે નહીં લખતાં માત્ર ચિન્હ-

જ લખે છે. જેમકે ૩૬ નું બે ઘાતમૂળ બતાવવું હોય તો $\sqrt{૩૬}$ લખાય. ઘાતમૂળ બતાવવાની બીજી રીત પણ છે, એટલે તે સંખ્યાને માથે ઘાતમૂળનો અંક એકના છેદમાં લખાયછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ઘાતમૂળ $૬૪^{\frac{૧}{૩}}$ અને ૬૪ નું ચતુર્ઘાતમૂળ $૬૪^{\frac{૧}{૪}}$, ૩૬ નું વર્ગમૂળ $૩૬^{\frac{૧}{૨}}$ આ પ્રમાણે લખાય છે. પણ કોઈ સંખ્યાના કોઈ ઘાતનું કોઇ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, ત્યારે તે ઘાતનો અંક અંશમાં ને ઘાતમૂળનો અંક છેદમાં લખી તે અપૂર્ણાંક તે સંખ્યાને માથે લખાયછે. જેમકે ૮ ના વર્ગનું ત્રણ ઘાતમૂળ બતાવવું હોય, તો $૮^{\frac{૨}{૩}}$ લખાય. અથવા ચિન્હ કરીને અંદર $\frac{૨}{૩}$ લખે, જેમકે $\sqrt[\frac{૨}{૩}]{૮}$ લખાય. ૬૨ ના ત્રણ ઘાતનું ચતુર્ઘાતમૂળ $૬૨^{\frac{૩}{૪}}$ અથવા $\sqrt[\frac{૩}{૪}]{૬૨}$ આ પ્રમાણે બે રીતે લખાયછે. આઠનો વર્ગ ૬૪ માટે ૬૪ એ ઘાત સંખ્યા ને ૮ એ મૂળ સંખ્યા. પણ જેનું મૂળ નીકળતું નથી એટલે જે સંખ્યા કોઇ સંખ્યાનો ઘાત નથી, તે સંખ્યાને કરણીરૂપ સંખ્યા કહેછે. જેમકે ૨, ૫, ૬, ૭ ઇત્યાદી.

કોઇ સંખ્યાનું મૂળ તે સંખ્યા કરતાં ઓછું આવે, પણ એકનું કયું પણ મૂળ એકજ આવે. અપૂર્ણાંકનું મૂળઘાત ગણું વધારે આવે. જેમકે $\frac{૧}{૪}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{૧}{૨}$, $\frac{૧}{૨૭}$ નું ઘનમૂળ $\frac{૧}{૩}$, $\frac{૧}{૧૬}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{૧}{૪}$ ઈ૦

વર્ગમૂળમાં ચિન્હ મૂકવાનું કારણ—કોઇ સંખ્યાના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે તે સંખ્યાના બમણા કરતાં વધારે અંકો આવશે નહીં. ને ઓછામાં ઓછા બમણા કરતાં એક ઓછો, એથી

ઓછા અંક આવશે નહીં. એટલે એક અંકનાં વર્ગમાં વધારેમાં વધારે બે, ને ઓછામાં ઓછા એક અંક આવશે. બે અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ચાર, ને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંક આવશે, પાંચ અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ૧૦ ને ઓછામાં ઓછા નવ અંક આવશે. જેમકે ઓછામાં ઓછી એક અંકની સંખ્યા ૧ અને વધતામાં વધતી ૯ છે. તેનો વર્ગ ૧ અને ૮૧ આવશે. બે અંકની ઓછામાં ઓછી ૧૦ અને વધતામાં વધતી ૯૯છે, તેનો વર્ગ ૧૦૦ અને ૯૮૦૧ આવશે. એ ઉપરથી સમજાયછે કે કોઈ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો તે સંખ્યામાં એક કે બે અંક હશે, તો તેનું વર્ગમૂળ એક અંક, ત્રણ કે ચાર અંક હશે તો બે અંક, પાંચ કે છ અંક હશે તો ત્રણ અંક આવશે. ૫૬૨૧૮ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય. તો તેમાં ત્રણ આવશે. કેમકે ચાર અંક સુધીમાં તો બે અંક આવે, પણ પાંચ અંક છે, તેથી ત્રણ અંક આવશે, એટલે ૧૮ નું એક અંક, ૬૨૧૮ નું બે અંક ને ૫૬૨૧૮ નું ત્રણ અંક આવ્યું, તે ઉપરથી એ પાંચ અંકોના ત્રણ ભાગ પાડયા. ૫, ૬૨, ૧૮ તેમના ઉપર નિશાની કરી, તો તરત માલમ પડશે. જેમકે ૫૬૨૧૮ મૂળમાં ત્રણ અંક આવશે. તેમાં પહેલો સોનો, બીજો દશકનો, ને ત્રીજો એકમનો આવશે. એટલે દશ હજારના સ્થાન ૫ માંથી સોનો અંક નીકળશે, ને બાકીના બેમાંથી દશક ને એકમ નીકળશે. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળેછે, કે જે સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તે સંખ્યાના એકમ અથવા પહેલા અંક ઉપર, ત્રીજા અંક ઉપર, પાંચમા અંક ઉપર એમ ચિન્હ કરવાં.

વર્ગમૂળની રીતનું કારણ—કોઈ સંખ્યાના વર્ગમૂળમાં બે કરતાં વધારે અંક હોય, તો તે સંખ્યા, તે અંકોના વર્ગોના સરવાળામાં ડાબા હાથ ભણીથી દરેક અંકની બમણાઈ ને તેની પછીના અંકોના સરવાળાનો ગુણાકાર ઉમેરીએ, તેની બરોબર હોવી જોઈએ. આનું કારણ વર્ગ કરવાની પાંચમી રીત ઉપરથી સમજાશે.

જેમકે—૬૧૩૦૮૯ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો—

૬૧૩૦૮૯ (૭૦૦+૮૦+૩=૭૮૩.

૭૦૦² = ૪૯૦૦૦૦

૧૨૩૦૮૯

(૧૪૦૦+૮૦)૮૦ = ૧૧૮૪૦૦ = ૨×૭૦૦×૮૦+૮૦².

૪૬૮૯

(૧૫૬૦+૩)૩ = ૪૬૮૯ = ૨×૩×(૭૦૦+૮૦)+૩².

૦૦૦૦

ઉપર કહ્યા પ્રમાણે ઉપલી સંખ્યા ઉપર ચિન્હ મૂક્યાથી માલમ પડેછે કે તેના વર્ગમૂળમાં ત્રણ અંક આવશે એટલે પહેલો અંક સોનો આવશે. માટે એ આખી સંખ્યામાંથી પાંચમા ને છઠ્ઠા અંક ૬૧ માં સોનો કયો અંક સમાશે, તે જોઈએ. ૬૧ નું વર્ગમૂળ ૪૯ ના વર્ગમૂળ કરતાં વધારે, અને ૬૪ કરતાં ઓછું છે. માટે ૬૧૦૦૦૦ માં ૭૦૦ કરતાં વધારે ને ૮૦૦ કરતાં ઓછાનો વર્ગ સમાશે, માટે ૭૦૦ એ પહેલો અંક આવશે. તેથી ૭૦૦ નો વર્ગ બાદ કર્યાથી ૧૨૩૦૮૯ વધ્યા. એમાં કેટલા દશક સમાશે, તે ખોળી કહાડવુંછે. તે દશક ગમે તે હોય, પણ ૧૨૩૦૮૯ માં તે દશ-

કનો વર્ગ અને ૭ સોના બમણાનો ને તે દશકનો ગુણાકાર સમાવો જોઇએ, એટલે ૨×૭૦૦×ને દશક+તે દશકનો વર્ગ અથવા (૨×૭૦૦+દશક) દશક સમાવા જોઈએ. હવે કયો દશક છે, તે જાણવા માટે ૨×૭૦૦=૧૪૦૦ ને એક દશકે ગુણ્યા તો ૧૪૦૦ થયા, તે ૧૨૩૦૮૯ માં ૮ વાર સમાશે એમ જણાયછે, માટે આઠ દશક આવશે, એમ સમજાયછે. તેથી ૧૪૦૦+૮૦ને૮૦ એ ગુણી બાદ કર્યા તો ૪૬૮૯ બાકી રહેછે તે ઉપરથી ત્રીજો અંક એકમનો કહાડવાનોછે. તે એકમ ગમે તે હોય, પણ તેનો વર્ગ અને પાછલા બંને અંકોની બમણાઇનો, ને એકમનો ગુણાકાર ૪૬૮૯ માં સમાવો જોઇએ. એટલે ૨(૭૦૦+૮૦×ને ૨કમ)+એકમનો વર્ગ અથવા ૭૮૦×૨=૧૫૬૦×એકમ×એકમ સમાવા જોઇએ. પણ ૪૬૮૯ ને ૧૫૬૦ ભાગી જોતાં ત્રણ આવે છે. માટે ત્રણ એકમ આવવા જોઈએ, તેથી ૨×૭૮૦×૩+૪^2 =૪૫૮૯ આવેછે. માટે ૭ સો ૮ દશક ને ૩ એકમ =૭૮૩ જવાબ.

ઉપર વર્ગમૂળ ગણી બતાવ્યું છે તે ઉપરથી વર્ગમૂળની રીત શી રીતે ઉત્પંન થઈ તે નીચે મુજબ.

૧૪૧૩૭૬નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોયતો—

)૧૪૧૩૭૬(૩૦૦+૭૦+૬=૩૭૬ જવાબ.

૩૦૦^2=	૯૦૦૦૦	
	૫૧૩૭૬	
૬૭૦×૭૦=	૪૬૯૦૦	=(૨×૩૦૦×૭૦)+૭૦^2
	૪૪૭૬	
૭૪૬×૬=	૪૪૭૬	=૨×(૩૦૦+૭૦)×૬+૬^2
	૦૦૦૦	

આ ઉપરથી નીચેની રીત થઈ છે.

```
૩      )૧૪૧૩૭૬( ૩૭૬
+૩      ૯
 ૬૭)    ૫૧૩(૭
+૭      ૪૬૯
૭૪૬)    ૪૪૭૬(૬
        ૪૪૭૬
        ૦૦૦૦
```

છેલ્લી રીત એ વર્ગમૂળ કહાડવાની રીત છે, તેનું કારણ ઉપ-ર લખેલી રીત ઉપરથી સમજાશે.

જ્યારે વર્ગમૂળ કહાડતાં છેવટ ન આવે ને કોઈ સંખ્યા વધે તો વર્ગમૂળમાં જેટલાં દશાંશ સ્થળ લાવવાં હોય તેથી બમણાં તે સંખ્યા ઉપર દશાંશ સ્થળમાં મીંડાં ચડાવવાં. જેમકે ૭નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય તો નીચે પ્રમાણે કરવું.

```
  ૨ ) ૭૦૦૦૦૦૦(૨.૬૪૫
  ૨   ૪
 ૪૬   ૩૦૦(૬
  ૬   ૨૭૬
 ૫૨૪ )૨૪૦૦(૪
   ૪  ૨૦૯૬
૫૨૮૫ )૩૦૪૦૦(૫
       ૨૬૪૨૫
        ૩૯૭૫
```

આમાં દશાંશ સ્થળ ૩ લાવ્યા છીએ માટે ત્રણ સ્થળ કાપી દશાંશ ચિન્હ કર્યું એટલે ૨.૬૪૫ જવાબ.

કોઇ અપૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો અંશનું વર્ગમૂળ અંશ સ્થળે અને છેદનું વર્ગમૂળ છેદ સ્થળે લખવું એ જવાબ. જેમકે $\frac{૪}{૯}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો ૪ નું વર્ગમૂળ ૨ અંશ, અને ૯ નું વર્ગમૂળ ૩ છેદ, એટલે $\frac{૨}{૩}$ આવશે. $\frac{૪}{૯}$ નું વર્ગમૂળ લખવું હોય તો $\sqrt{\frac{૪}{૯}}$ અથવા $\frac{\sqrt{૪}}{\sqrt{૯}}$ લખાય. જેના અંશને છેદનું વર્ગમૂળ જતું ન હોય, તેના અંશને અને છેદને છેદે અથવા અંશે ગુણીશું, તો પાછળ કહી ગયા, તે પ્રમાણે કીમતમાં ફેર પડશે નહીં. ને જો છેદે ગુણીશું, તો છેદનું વર્ગમૂળ ને અંશે ગુણીશું તો અંશનું વર્ગમૂળ જશે, એટલે અંશને છેદમાંથી એકજ પદ માત્ર વર્ગમૂળમાં રહેશે. તેનું વર્ગમૂળ ઉપર કહ્યા પ્રમાણે કહાડયાથી નીકળશે. જેમકે $\frac{૩}{૭}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો $\frac{૩}{૭}\times૭=\frac{૬}{૨૧}$ તેનું વર્ગમૂળ $\sqrt{\frac{૩}{૨૧}}$ જ. અથવા $\frac{૩}{૭}\times૭=\frac{૨૧}{૪૯}$ નું વર્ગમૂળ $\frac{\sqrt{૨૧}}{૭}$ આવશે. પછી ૨૧ નું વર્ગમૂળ કાહાડયાથી જવાબ નીકળશે.

દશાંશનું વર્ગમૂળ કહાડવાની રીત ને ચિન્હ મૂકવાની રીતનું કારણ—દશાંશમાં જેટલાં સ્થળ હોય, તે પ્રમાણે તેને વ્યવહારીમાં મૂકી છેદ મૂકવા. પછી તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું.

જેમકે $\sqrt{૪૦.૯૬}=\sqrt{\frac{૪૦૯૬}{૧૦૦}}=\frac{૬૪}{૧૦}=૬.૪$ અથવા $\sqrt{.૪૦૯૬}=\frac{\sqrt{૪૦૯૬}}{\sqrt{૧૦૦૦૦}}=\frac{૬૪}{૧૦૦}=.૬૪$ આ ઉપરથી માલમ પડેછે કે દશાંશમાં બે સ્થળ હશે,- તો તેનું વર્ગમૂળ એક અને ચાર સ્થળ હશે, તો બે આંક આવશે માટે દશાંશનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો પ્રથમ શતાં-

શ ઉપર, પછી દશ સહસ્ત્રાંશ ઉપર એમ બીજા બીજા અંક ઉપર ચિન્હ કરવું. જેટલાં ચિન્હ થશે, તેટલાં દશાંશ સ્થળ વર્ગમૂળમાં આવશે. દશાંશ સાથે પૂર્ણાંક હોય, તો બંનેનું ભેગું વર્ગમૂળ દશાંશ ન હોય, એ રીતે કહાડી પછી જેટલાં દશાંશ સ્થળ ઉપર ચિન્હ હોય, તેટલા અંક જમણી તરફથી કાપીને દશાંશ અંકની સંખ્યા એકી હોય, તો તે ઉપર જમણી તરફ એક શૂન્ય મૂકી બેકી અંક કરવા, કેમને દશાંશમાં જમણી તરફ શૂન્ય મૂક્યાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી એવું આપણે પાછળ સમજાવી ગયા છીએ.

ઘનમૂળ.

કોઇ સંખ્યા કયી સંખ્યાનો ઘન છે એ મૂળ સંખ્યાને તે સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહે છે. ૨૭ એ ત્રણનો ઘન છે માટે ૩ એ ૨૭ નું ઘનમૂળ. કોઇ સંખ્યાનું ઘનમૂળ બે અંક એટલે એકમ ને દશક હોયતો તે સંખ્યામાં દશકનો ઘન+દશકના વર્ગના ત્રમણા ને એકમનો ગુણાકાર+એકમના વર્ગના ત્રમણા ને દશકનો ગુણાકાર+એકમનો ઘન એટલું સમાવું જોઇએ. જેમકે ૧૭૫૬૧૬ એ ૫૬નો ઘન છે માટે એમાં $૫૦^{૩}+૫૦^{૨}\times૩\times૬+૫૦\times૩\times૬^{૨}+૬^{૩}$ એટલું સમાય છે.

ઘનમુળમાં ચિન્હ મુકવાની રીતનું કારણ—૧૦ નો ઘન ૧૦૦૦ છે માટે જેટલા દશકનો ઘન કરીશું તે, તે દશકના અંકના ઘનને ૧૦૦૦ ગુણ્યા જેટલો થશે. જેમકે $૪૦^{૩}=૪^{૩}\times૧૦^{૩}$ અથવા $૪^{૩}\times૧૦૦૦=૬૪૦૦૦$ નું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો છેલ્લા ત્રણ અંક કાપતાં જેટલા હજાર વધે તેનું ઘનમૂળ કહાડી તેને દશે ગુણ્યા એટલે ચાલશે. તેથી ૬૪ નું ઘનમૂળ ચાર એ દશક આવ્યા માટે ૪×૧૦=૪૦ એ ૬૪૦૦૦ નું ઘનમૂળ. છેલ્લા ત્રણ અંકનું ઘન-

મૂળ એકમ આવશે, ને તે પેહેલાંના ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ દશક આવશે. તેજ પ્રમાણે ૧૦૦ નો ઘન ૧૦૦૦૦૦૦ છે માટે જેટલા શતકનો ઘન કરીશું તે, તે શતકના અંકના ઘનને દશ લાખે ગુણ્યા જેટલા આવશે. તેથી છેલ્લા ૭ અંક કહાડતાં જેટલા દશ લાખ રહે તેનું ઘનમૂળ કહાડી તેને સોએ ગુણવાથી ને સંખ્યાનું ઘનમૂળ આવશે. ૫ શતકનો ઘન ૧૨૫૦૦૦૦૦૦ આવશે તેનું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો છેલ્લા ૭ અંક કહાડી ૧૨૫ નું ઘનમૂળ કહાડયું તો પાંચ આવ્યું તેને ૧૦૦ એ ગુણ્યા એટલે ૫૦૦ જવાબ.

માટે કેટલાક દશલાખ, કેટલાક હજાર અને શતક, દશક ને એકમ હોય એવી સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો છેલ્લા ૭ અંક જૂદા રાખતાં જેટલા દશલાખ હોય તેનું ઘનમૂળ કહાડવું, પછી જેટલા હજાર હોય તેનું ને પછી છેલ્લા ત્રણ અંકનું કહાડવું એટલે પ્રથમ અંક શતકનો પછી દશકનો ને છેલ્લો એકમનો આવશે. પણ એ પ્રમાણે અંકો જૂદા રાખવાને બદલે તેમના ઉપર ટપકાની નિશાની વર્ગમૂળમાં કરીએ છીએ તેવી કર્યાથી પણ ચાલશે. એટલે ૧૭૫૬૧૬ આનું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો છેલ્લા ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ એકમને ૧૭૫ હજારનું ઘનમૂળ દશક આવશે માટે ૧૭૫૬૧૬ આ પ્રમાણે ટપકાં કર્યાથી પણ ચાલશે. ૧૭૫૬૧૬ ના ઘનમૂળમાં બે અંક આવશે. પેહેલો દશક ને બીજો એકમનો. ઘનમૂળ કહાડવાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ ત્રણ અંકે ટપકાં શાથી કરે છે તે ઉપરની રીતથી સમજાશે. દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં, ૧ નો ઘન ·૦૦૧ છે માટે ·૦૦૧ નું ઘનમૂળ. ·૧ આવે એટલે ·૦૦૧ ના ગમે તેટલા ઘન ગણ્યા કરીશું

તેનું ઘનમૂળ તેટલા દશાંશ આવશે. ·૪ નો ઘન ·૦૬૪ નું ઘનમૂળ ·૪ આવશે. એટલે દશાંશવા પેહેલા ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ દશાંશ તે પછીના ત્રણ અંકનું ઘનમૂળ શતાંશ ઇત્યાદી આવશે. માટે જે સંખ્યાનું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તેના દશાંશમાં પણ ડાબા હાથ ભણીથી ત્રણ અંક ગણી તે ઉપર ટપકાં કરવાં. જેટલાં ટપકાં થશે તેટલા અંક ઘનમૂળના દશાંશમાં આવશે. જો ત્રણ અંક પૂરા ન થતા હોય તો ખૂટતાં મીડાં ચઢાવવાં. કેમકે દશાંશમાં જમણા હાથ ભણી મીડાં ચડાવ્યાથી કીમતમાં કાંઈ ફેર પડતો નથી, જેમકે ·૪ નું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો ·૪૦૦ નું કહાડવું. કેમકે ·૪ ની ને ·૪૦૦ ની કીમત સરખીજ છે.

ઘનમૂળની રીતનું કારણ—નીચે ગણેલા દાખલાથી સમજાશે. ૧૭૫૬૧૬ નું ઘનમૂળ કહાડવું હોય તો ૧૭૫૬૧૬ ટપકાં મૂકયાથી જણાય છે કે ઘનમૂળમાં બે અંક આવશે. એકમ ને દશક. માટે એ સંખ્યામાં $\text{દશક}^{૩}+૩\times\text{દશક}^{૨}\times\text{એકમ}+૩\times\text{દશક}\times\text{એકમ}^{૨}+\text{એકમ}^{૩}$ સમાતા જોઇએ. તેથી

)૧૭૫૬૧૬(૫૦+૬=૫૬

$૫૦^{૩}$ = ૧૨૫૦૦૦

૩×૫૦^{૨}=૭૫૦૦) ૫૦૬૧૬(૬

$(૩\times૦૫^{૨}+૩\times૫૦\times૬+૬^{૨})\times૬$ = ૫૦૬૧૬=$૩\times૫૦^{૨}\times૬+૩\times૫૦\times૬^{૨}+૬$

૦૦૦૦૦

અથવા ૩×૫૦^{૨}=૭૫૦૦

$+૩\times૫૦\times૬$=૯૦૦

$+$ $૬^{૨}$=૩૬

૮૪૩૬$\times$૬=૫૦૬૧૬

ઉપલા હિસાબમાં પ્રથમ ૧૭૫૦૦૦નું ધનમૂળ કહાડવાનું છે તેનું ધનમૂળ ૫ આવે છે તે દશક આવ્યા તેથી એ આખી સંખ્યામાંથી $૫૦^{૩}$ બાદ કર્યોતો ૫૦૬૧૬ બાકી રેહેછે તેમાં $૫૦^{૨}\times૩\times$ એકમ $+૩\times૫૦\times$ એકમ$^{૨}+$ એકમ^{૩} સમાવા જોઈએ. હવે એકમ કયો આવશે તે જાણવા માટે ૫૦૬૧૬ ને $૫૦^{૨}\times૩$ વડે ભાગ્યાતો ૬ આવે છે તેથી ૬ એકમ આવશે એમ જણાય છે, માટે ૫૦૬૧૬ માંથી $૩\times૫૦^{૨}\times૬+૩\times૫૦\times૬^{૨}+૬^{૩}$ અથવા $(૩\times૫૦^{૨}+૩\times૫૦\times૬+૬^{૨})\times૬$ બાદ કરવા જોઇએ પણ $(૩\times૫૦^{૨}+૩\times૫૦\times૬+૬^{૨})\times૬=$ ૫૦૬૧૬છે માટે ૧૭૫૬૧૬નું ધનમૂળ $૫૦+૬=૫૬$ આવ્યા એ જવાબ.

તેમજ ત્રણ અંક ધનમૂળમાં આવે એવી સંખ્યા લીધી. જેમકે ૩૩૬૯૮૨૬૭નું ધનમૂળ કહાડવું હોયતો ચિન્હ મૂકયાથી માલમ પડે છે કે એ સંખ્યાનું ધનમૂળ ત્રણ અંક આવશે એટલે પ્રથમ અંક સોનો બીજો દશકનો ને ત્રીજો એકમનો આવશે.

	૩૩૬૯૮૨૬૭	૩૦૦
$૩૦૦^{૩}=$	૨૭૦૦૦૦૦૦	
$૩\times૩૦૦^{૨}=૨૭૦૦૦૦$	૬૬૯૮૨૬૭	૨૦
$૩\times૩૦૦\times૨૦=૧૮૦૦૦$		
$૨૦^{૨}=$ ૪૦૦		
૨૮૮૪૦૦		
$\times૨૦=$	$૫૭૬૮૦૦૦=૩\times૩૦૦^{૨}\times૨૦+૩\times૩૦૦$	
$૩\times૩૨૦^{૨}=૩૦૭૨૦૦$	)૯૩૦૨૬૭($\times૨૦^{૨}+૨૦^{૩}$ અથવા $(૩\times$	
$૩\times૩૨૦\times૩=$ ૨૮૮૦	$૩૦૦^{૨}+૩\times૩૦૦\times૨૦+૨૦^{૨})$	
$૩^{૨}=$ ૯	$\times૨૦$	
૩૧૦૦૮૯		
$\times૩=$	$૯૩૦૨૬૭=૩\times૩૨૦^{૨}\times૩+૩\times૩૨૦$	
	૦૦૦૦૦૦ $\times૩^{૨}+૩^{૩}$ અથવા ૩×૩૨૦^{૨}	
	$+૩\times૩૨૦\times૩+૩^{૨})\times૩$	

ઉપલા હિસાબમાં પ્રથમ ૩૩૦૦૦૦૦૦નું ઘનમૂળ કહાડવાનું છે તે ૩૦૦ આવ્યું માટે ૩૦૦ નો ઘન ૨૭૦૦૦૦૦૦ બાદ કર્યા તો ૬૬૯૮૨૬૭ બાકી રહ્યા તેમાં ૩×૩૦૦^{2}×દશક +૩×૩૦૦×દશક^{2}+દશક^{3} સમાવા જોઈએ. તેથી કયો દશક સમાશે તે જાણવા સારૂ પ્રથમ ૩×૩૦૦^{2} વડે ભાગ્યા તો ૨ દશક અથવા ૨૦ આવે છે માટે બીજો અંક ૨૦ આવશે તેથી ૬૬૯૮૨૬૭માંથી ૩×૩૦૦^{2}×૨૦+૩×૩૦૦×૨૦^{2}+૨૦^{3} અથવા (૩×૩૦૦^{2}+૩×૩૦૦×૨૦+૨૦^{2})×૨૦ બાદ કર્યા તો ૯૩૦૨૬૭ બાકી રહેલા છે પણ તેમાં ૩×૩૨૦^{2}×એકમ+૩×૩૨૦×એકમ^{2} એકમ^{3} સમાવા જોઈએ માટે ૯૩૦૨૬૭ને ૩×૩૨૦^{2} વડે ભાગ્યા તો ૩ એકમ આવ્યા માટે ત્રીજો અંક અથવા એકમ ૩ આવશે તેથી ૯૩૦૨૬૭માંથી ૩×૩૨૦^{2}×૩+૩×૩૨×૩^{2}+૩^{3} અથવા (૩×૩૨૦^{2}+૩×૩૨૦×૩+૩^{2})×૩=૯૩૦૨૬૭ બાદ કીધા તો કાંઇ ન વધ્યું માટે ૩૩૬૯૮૨૬૭નું ઘનમૂળ ૩૦૦+૨૦+૩=૩૨૩ આવ્યા. ઉપલા હિસાબને બીજી ટુંકી રીતે ગણીએ તો નીચે પ્રમાણે ગણાશે.

	૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩
૩^{3}=	૨૭
૩×૩૦^{2}=૨૭૦૦	૬૬૯૮
૩×૩૦×૨= ૧૮૦	
૨^{2}= ૪	
૨૮૮૪×૨=	૫૭૬૮
૩×૩૨૦^{2}=૩૦૭૨૦૦	૯૩૦૨૬૭
૩×૩૨૦×૩= ૨૮૮૦	
૩^{2}= ૯	
૩૧૦૦૮૯×૩=	૯૩૦૨૬૭
	૦૦૦૦૦૦

પ્રથમ ભાજક ૩ એ ૩૦૦ છે પણ બીજો ભાજક કહાડવો છે તેથી ૩૦૦ ના દશક ૩૦ માટે ૩૦ લીધા છે એ ૩×૩૦^{2} =૨૭૦૦ એ પ્રથમ અજમાયશ ભાજક આવ્યો છે.

હવે ત્રીજો ભાજક એકમ કહાડવો છે તેથી ૩૨ દશકના એકમ ૩૨૦ લીધા છે એ ૩×૩૨૦^{૨}=૩૦૭૨૦૦ એ બીજો અજમાયશ આવ્યો છે.

વળી ઉપરના હિસાબને ટુંકામાં નીચે પ્રમાણે ગણાશે. એ રીત પણ ઉપરની રીત ઉપરથીજ કરેલી છે.

| ૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩ ‖ ૩×૩૨^{૨}=૩૦૭૨ છે
પેહેલો અજમાયશ ભાજક | ૨૭ ‖ હવે ૩૨^{૨}=૩૦^{૨}+
૩×૩૦^{૨}=૨૭૦૦ | ૬૬૯૮ ‖ ૨(૩૦×૨)+૨^{૨} છેતેને
૩×૩૦×૨+૨^{૨}=૧૮૪ ‖ ત્રણે ગુણવા માટે ૩×
૨૮૮૪ | ×૨=૫૭૬૮ ‖ ૩૦^{૨}+૩×૩(૩૦×૨)
બીજો અજમાયશ ૪ | ૯૩૦૨૬૭ ‖ +૩×૨^{૨} થવા જોઈએ
ભાજક×૩૨૦^{૨}=૩૦૭૨૦૦ ‖ તે ૧૮૪+૨૮૮૪+૪
(૩×૩૨૦×૩)+૩૨=૨૮૮૯ ‖ થી થઈ રહે છે માટે એ
૩૧૦૦૮૯×૩=૯૩૦૨૬૭ ‖ ત્રણનો સરવાળો કરી
૦૦૦૦૦૦ ‖ બે મીંડાં ચઢાવી ૩×
૩૨૦^{૨} ઉત્પન કર્યા હવે

૨૮૮૪ માં ૩×૩૦^{૨}+૩×૩૦×૨ એકવાર છે. અને એકવાર બેનો વર્ગ છે તે ૧૮૪ માં પણ એકવાર ૩×૩૦+૨ બેનો વર્ગ છે. માટે બેવાર ૩×૩૦×૨ આવ્યા અને બેવાર બેનો વર્ગ આવ્યો પણ બેનો વર્ગ ત્રણવાર જોઇએ તેથી ત્રીજીવાર ઉપલી ૧૮૪+૨૮૮૪ ની રકમમાં બેનો વર્ગ ઉમેર્યો એટલે ૩×૩૨^{૨} થઇ રહ્યો પણ ૩×૩૨૦૨ જોઈએ છીએ માટે ૩×૩૨^{૨}=૩૦૭૨ ઉપર બે મીંડાં મૂક્યાથી ૩૦૭૨૦૦ આવ્યા છે. આગળ ભાગ કહાડવો હોય તો અજમાયશ ભાજક કહાડવાને

એજ પ્રમાણે કર્યાથી આવશે એટલે વર્ગ કરી ત્રણે ગુણવાની કડાકુટ પડશે નહિ.

ઉપરની રીત ઉપરથી વળી બીજી ટુંકી રીત થાય છે.

૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩
૨૭
આજમાયશ ભાજક ૩×૩^{૨}=૨૭) ૬૬૯૮
૩×૩×૨= ૧૮
૨^{૨}= ૪
૨૮૮૪×૨= ૫૭૬૮
૪ ૯૩૦૨૬૭
આજમાયશ ભાજક ૩×૩૨^{૨}=૩૦૭૨
૩×૩૨×૩= ૨૮૮
૩^{૨}= ૯
૩૧૦૦૮૯×૩=૯૩૦૨૬૭
૦૦૦૦૦

આ રીતમાં માત્ર ભાજકમાં મીડાં આવતાં તે કહાડી નાંખ્યાં છે ને તેને બદલે આંક કાપીને મૂકયા છે.

ઉપરની રીત ઉપરથીજ હાર્નર સાહેબની રીત નીચે પ્રમાણે નીકળી છે એ રીતથી ત્રણ ને નવા ભાગાકારના વર્ગે ગુણી આજ-માયશ ભાજક કહાડવાનો છે તેને બદલે બે ખાનાં પાડે છે એટલે પહેલા ખાના ઉપરથી આજમાયશ ભાજકમાં ખરો ભાજક લાવવાની રકમ કહાડી શકાય છે ને ઉપરની રીતમાં આજમાયશ ભાજકમાં સરવાળો કરવો પડે છે તેને બદલે એ રીતથી આજમાયશમાં માત્ર

એકજ રકમ ઉમેરવાની નીકળેછે તેમજ પેહેલા ખરા ભાજકની સાથે બીજી ત્રણ રકમ ઉમેરવાથી નવેા અજમાયશ ભાજક નીકળે છે. તેને બદલે આ રીતથી એકજ રકમ ઉમેરવી પડેછે એ ઉમેરવાની રકમ ઉપરની રીતમાં આપેલી. રકમેાના સરવાળા બરાબર થઈરહેછે તે નીચેની રીતથી સમજાશે એટલે આ હાર્નર સાહેબની રીત સેહેલી ને યાદ રહે એવી છે ને તેમાં ભૂલ થવાનેા સંભવ થેાડેા રહેછે જેમકે:-

```
                                  |૩૩૬૯૮૨૬૭|૩૨૩
૩×૩૦=૯૦  ×૩૦=૨૭૦૦                 |૨૭
                                   ------
       ૨                           ૬૬૯૮
     ------
     ૯૨×૨    = ૧૮૪ ⎫
               ------ ⎪
       ૪       ૨૮૮૪ ⎬×૨=૫૭૬૮
    ------            ⎪  ---------
    ૯૬૦           ૪ ⎭    ૯૩૦૨૬૭
                 ---------
       ૩       ૩૦૭૨૦૦
    ------
    ૯૬૩×૩ =      ૨૮૮૯
               ---------
               ૩૧૦૦૮૯×૩= ૯૩૦૨૬૭
                         ---------
                         ૦૦૦૦૦૦
```

પ્રથમ ૩×૩^{૨} મૂકતા તેને બદલે બીજો અંક દશક આવવાનેા તે ઉમેરવેા છે માટે ૩×૩૦=૯૦ ને ૯૦×૩૦=૨૭૦૦ મૂક્યા છે. તેમાં ૯૦+૨=૯૨ ને ૯૨×૨=૧૮૪ ઉમેર્યાથી ૨૮૮૪ ખરેા ભાજક આવ્યેા. તે ઉપર પણ આવેલા છે. હવે પ્રથમ આપણે ૩×૩૦×૨ +૨^{૨}=૧૮૪ ઉપજાવ્યા હતા ને ૩×૩૦×૨+૨^{૨}=(૩×૩૦+૨)×૨ છે તેથી એ રીત ઉત્પન્ન કરી છે. વળી ૯૨ માં બે વાર બે ઉમેર્યાથી ૯૬ થયા તે દશક છે તેમાં એકમ ઉમેરવાનેા માટે તેના એકમ કરવાને મીંડું ચઢાવ્યું ને ૩૦૭૨ એ ૩×૩૨^{૨} છે પણ તે ૩×૩૨૦^{૨} ઉપરની રીતે આવવેા જોઇએ માટે ૩૦૭૨ ઉપર બે મીડાં ચઢાવી

૩૦૭૨૦૦ કર્યા છે.

પ્રથમની રીતમાં બીજા અજમાયશ ભાજક ૩૦૭૨૦૦ માં $૩ \times ૩૨૦ \times ૩ + ૩^{૨}$ ઉમેરતા એટલે ૨૮૮૯ ઉમેરતા તે ૯૬૩$\times$૩ ની બરાબર છે કેમકે $૩ \times ૩૨૦ \times ૩ + ૩^{૨} = (૩ \times ૩૨૦ + ૩) \times ૩$ છે તેથી ૨૮૮૯ ઉપરની રીતે ઉત્પન્ન કરી ઉમેર્યાછે.

વળી એ રીત ઉપરથી નીચેની બીજી રીત નીકળીછે, આ રીત કોઇ પણ ઘાતમૂળ કહાડવામાં કામ આવેછે. જેટલા ઘાતમૂળ કહાડવું હોય તેના કરતાં એક ઓછું એટલાં ખાનાં ભાજકમાં પાડવાં પછી પેહેલા ખાનામાં પેહેલા ભાગાકાર, બીજામાં તેના વર્ગ, ત્રીજામાં તેનો ઘન, એ પ્રમાણે મૂકવો. પછી પેહેલા ખાનામાં તેજ ભાગાકાર ઉમેરવો. તેને ભાગાકારે ગુણી બીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં એમ ઉમેરવા. વળી પેહેલા ખાનામાં પેહેલો ભાગ ઉમેરવો, તેને ભાગાકારે ગુણી બીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવા. મતલબ કે એવી ઉમેરવાની રકમ છેલ્લા ખાનામાં એકવાર, તેની પાસેના ડાબા હાથના ખાનામાં બેવાર, તેની પાસેના ખાનામાં ત્રણવાર, એ પ્રમાણે ઉમેરવી; એટલે ઘનમૂળ કાઢવું હોય તો બે ખાનાં હોય માટે ડાબાહાથના પેહેલા ખાનામાં બે વાર ને બીજામાં એકવાર ઉમેરવી. ચતુર્ધાત મૂળ હોય તો પેહેલામાં ત્રણવાર, બીજામાં બેવાર ને ત્રીજામાં એકવાર એમ ઉમેરવી. પછી પેહેલા ખાનાની સંખ્યા ઉપર એક, બીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર બે, ને ત્રીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ મીડાં મૂકવાં. એ છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપર નવો ભાગ કહાડવો. ને નવો

ભાગ વળી પેહેલા ખાનામાં ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજા ખાનામાં ઉમેરવો ને તેને નવા ભાગે ગુણી ભાજ્યમાથી બાદ કરવા બાકી ઉપર બીજા ત્રણ અંક ઉમેરવા. પછી વળી ઉપરની રીતે ત્રણ ખાનાં હોય તો પેહેલા ખાનામાં નવો ભાગ ત્રણવાર, બીજામાં બે વાર ને ત્રીજામાં એકવાર ઉમેરી, ઉપર પ્રમાણે મીંડાં ચઢાવવાં, એટલે છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપરથી નવો ભાગ કાહાડવો. પછી છેલ્લા ખાનામાં નવો ભાગ ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજામાં, ને તેને નવા ભાગે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવાથી સરવાળો ખરો ભાજક થશે. તેને નવા ભાજકે ગુણી ભાજ્યમાંથી બાદ કરવા. એ રીતે જેટલા અંક આવવાના હોય ત્યાંસુધી કરવું. આ રીત, નીચે દાખલો કરી બતાવ્યો છે, તેથી સમજાશે. તેનું કારણ હાર્નર સાહેબની રીત સાથે સરખાવ્યાથી માલમ પડશે. નીચે ઘનમૂળછે માટે ભાજકમાં બે ખાનાં પાડ્યાંછે.

૩	૯		૩૩૬૯૮૨૬૭ | ૩૨૩
૩			૨૭
૬×૩=	૧૮		૬૬૯૮
૩	૨૭૦૦		
૯૨			
૯૨×૨=	૧૮૪		
૨	૨૮૮૪×૨=	૫૭૬૮	
૯૪×૨=	૧૮૮	૯૩૦૨૬૭	
૨	૩૦૭૨૦૦		
૯૬૩			
૯૬૩×૩=	૨૮૮૯		
	૩૧૦૦૮૯×૩ =	૯૩૦૨૬૭	
		૦૦૦૦૦૦	

ઉપરની રીતે ચતુર્ઘાતમૂળનો દાખલો ૩ ખાનાં પાડી નીચે પ્રમાણેછે.

૩ ૯ ૨૭ | ૧૦૮૮૪૫૪૦૨૪૧ | ૩૨૩
૩ | ૮૧
૬×૩=૧૮
૩ ૨૭×૩ = ૮૧
૯×૩=૨૭ ૧૦૮૦૦૦ | ૨૭૮૪૫૪
૩ ૫૪૦૦
૧૨૦
૨
૧૨૨×૨ = ૨૪૪
૨ ૫૬૪૪×૨=૧૧૨૮૮
૧૨૪×૨ = ૨૪૮ ૧૧૯૨૮૮×૨ =૨૩૮૫૭૬
૨ ૫૮૯૨×૨=૧૧૭૮૪
૧૨૬×૨ = ૨૫૨ ૧૩૧૦૭૨૦૦૦ | ૩૯૮૭૮૦૨૪૧
૨ ૬૧૪૪૦૦
૧૨૮૦
૩
૧૨૮૩×૩=૩૮૪૯
૬૧૮૨૪૯×૩= ૧૮૫૪૭૪૭
૧૩૨૯૨૬૭૪૭×૩= ૩૯૮૭૮૦૨૪૧
૦૦૦૦૦૦૦૦૦

પણ આ રીત લાંબી હોવાથી બહુ ઘાતમૂળમાં આ રીત કામે નહિ લગાડતાં જ્યાં જરૂર પડે ત્યાંજ કામે લગાડવી. કેમકે ચતુર્ઘાત મૂળ કહાડવું હોય તો વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે ચતુર્ઘાત મૂળ નીકળશે. કેમકે ઘાતમાં પાછળ આવી ગયું કે વર્ગનો વર્ગ ક-

રવાથી ચતુર્ઘાત થાયછે. માટે વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડયાથી ચતુર્ઘાત મૂળ આવે. તેમજ ઘનનો વર્ગ ૭ ઘાત થાયછે માટે ઘનમૂળનું વર્ગમૂળ એ ૭ ઘાતમૂળ થાય. વળી વર્ગના વર્ગનો વર્ગ કરવાથી અષ્ટઘાત થાયછે. માટે વર્ગમૂળના વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ એટલે ત્રણવાર વર્ગમૂળ કહાડયાથી અષ્ટઘાતમૂળ આવેછે. ઘનમો ઘન કરવાથી એટલે ઘનનો વર્ગ કરી તેને ઘનની રકમે ગુણવાથી નવ ઘાત થાયછે માટે ઘનમૂળનું ઘનમૂળ કહાડયાથી નવ ઘાતમૂળ આવે. આ પ્રમાણે કરવાથી ઉપરની લાંબી રીતે ગણવા પડતા નથી. પણ જ્યાં એ રીત કામે લાગતી નથી, ત્યાં ઉપરની રીતે ખાનાં પાડી કરવાની જરૂર પડેછે. કોઈ રકમનું પંચ ઘાતમૂળ, સપ્ત ઘાતમૂળ ઇત્યાદિ ઘાતમૂળ ઉપરની વર્ગમૂળ ઘનમૂળની રીતે નીકળશે નહિ, કેમકે વર્ગનો કે ઘનનો કોઇ ઘાત કરવાથી પંચઘાત કે સપ્તઘાત થતો નથી. માટે એવાં ઘાતમૂળ કહાડવાં હોય ત્યારે ઉપલી ખાનાં પાડીને કરવાની રીતે ઘાતમૂળ કહાડવું.

ક્ષેત્રફળ.

સપાટી ઉપર જે આકૃતિઓ થાય તેનું માપ કહાડવાની રીતને ક્ષેત્રફળ કહે છે. એ આકૃતીઓ ગોળ, ચોખુણ, બહુખુણ, ત્રિકોણ ઈત્યાદિ આકારની હોય છે. એ જુદી જુદી આકૃતિઓની વ્યાખ્યા ભણનારે યાદ રાખવી જોઈએ.

કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણો કરનારી બે બાજુના એટલે લંબાઇ ને પહોળાઈના ગુણાકારની બરાબર છે.

કારણ—એક કાગળ એક ફુટ લાંબો અને એક ફુટ પહોળો

હોય તેને એક ચોરસ ફુટ કહેછે. હવે એક કાગળ ત્રણ ફુટ લાંબો હોય ને એક ફુટ પહોળો હોય તો તેના એક એક ચોરસ ફુટ જે- વડા ત્રણ કકડા થાય છે. પણ જો તે કાગળ બે ફુટ પહોળો હોય તો ૩×૨=૬ કડકા થાય એટલે ૬ ચોરસ ફુટ થાય. ને લંબાઇને પહોળાઈનો ગુણાકાર ૬ ચોરસ થાય છે. તેથી ઉપરની રીત નીકળીછે.

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની એક બાજુના વર્ગની બરાબર છે, **કારણ** કે ચોરસની લંબાઇ ને પહોળાઇ સરખી હોય છે. એટલે લંબાઈને પહોળાઇનો ગુણાકાર ને એક બાજુનો વર્ગ કરવો એ બંને સરખુંજ છે

સમાંતર બાજુ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયો અને પાયા ઉપર સામેના ખુણાથી લંબ દોરીએ તે એના ગુણકાર બરાબર છે.

કારણ—સમાંતર બાજુ ચોખુણમાં પાયા ઉપર સામેના બંને ખુણાથી લંબ દોરીશું તો તે બંને લંબથી એક કાટખુણ ચોખુણ થશે. એ કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પ્રથમ કહેલા સમાંતર બાજુ ચોખુ- ણની †બરાબર છે. ને બંને ચોખુણના પાયા સરખા છે, માટે સમાં- તર બાજુ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયાનો ને પાયા ઉપર તેની સામેના ખુણાથી દોરેલા લંબના ગુણાકારની બરાબર છે.

કોઇ પણ ચોખુણ કે બહુખુણ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો તેના ત્રિકોણ કરી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી સરવાળો કરવો કેમકે તે ત્રિકોણો મળવાથી તે આપેલી આ- કૃતિ થએલી છે.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બે બાજુ આપી હોય

---

†ભૂમિતિના પ્રથમ ભાગની ૩૫ મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

તો ત્રીજી બાજુ નીકળેછે. કેમકે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બાજુનો વર્ગ તે, કાટખુણો કરનારી બંને બાજુના વર્ગોના સરવાળા બરાબર છે. ×એટલે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણો કરનારી બાજુમાંની એક ત્રણ ફુટ ને બીજી ચાર ફુટ હોય તો $૩^૨+૪^૨=૫^૨$ એ કાટખુણા સામેની બાજુનો વર્ગ થાય. માટે $૫^૨$નું વર્ગમૂળ ૫ ફુટ કર્ણ અથવા કાટખુણાની સામેની બાજુ થઇ, હવે જો એ ત્રણ બાજુમાંની ૩ ને ૫ ફુટ વાળી બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૩^૨=૪^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ, માટે તેનું વર્ગમૂળ ૪ ફુટની એ બાજુ થઇ. તેમજ ૫ ને ૪ ફુટની બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૪^૨=૩^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ માટે તેનું વર્ગમૂળ ૩ ફુટની એ બાજુ થઇ.

કોઈ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો પાયાનો ને તેની સામેના ખુણાથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબનો ગુણાકાર કરી તેને બેએ ભાગવા. કારણ—એક પાયા ઉપરને એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના સમાંતર બાજુ ચોખુણથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અર્ધું છે, ‡ ને કાટખુણ ચોખુણનું ક્ષેત્રફળ પાયો ને લંબના ગુણાકારના બરાબર છે, માટે તેના અર્દ્ધ બરાબર ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ થાય.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રજી રીત-ત્રિકોણની ત્રણે બાજુનો સરવાળો કરી તેનું અર્દ્ધ કરવું. એ અર્દ્ધમાંથી ત્રણે બાજુઓ જુદી જુદી બાદ કરવી એ ત્રણ બાકીઓ અને અર્દ્ધનો ગુણાકાર કરી તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું. * •

×ભૂમિતિના પ્રથમ ભાગની ૪૭ મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.
‡ ભૂમિતિના પ્રથમ ભાગની ૪૧ મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.
* ભૂમિતિની પાછલી બુકોને આધારે સિદ્ધ થશે.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને પાયો આપ્યો હોય તો કર્ણના વર્ગમાંથી પાયાનો વર્ગ બાદ કર્યાથી લંબનો વર્ગ નીકળશે. તેનું વર્ગ મૂળ કર્યાથી લંબ આવશે. પછી લંબને પાયાના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું. આનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે. તેજ પ્રમાણે કર્ણને લંબ આપે તો કર્ણનો વર્ગ-લંબનો વર્ગ=પાયાનો વર્ગ આવે. તેનું વર્ગમૂળ પાયો આવશે. પછી ઉપરની રીતે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું. જો ક્ષેત્રફળ અને પાયા ઉપરથી કર્ણ કે લંબ કહાડવો હોય તો $\frac{\text{પાયો}\times\text{લંબ}}{૨}=$ ક્ષેત્રફળ, માટે લંબ$=\frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{પાયો}}\times૨$ પછી લંબનો ને પાયાનો વર્ગ કરી સરવાળો લઈ તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે કર્ણ આવશે.

કોઇ પણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને લંબ આપ્યો હોય ને પાયો કહાડવો હોય તો:—

$$\frac{\text{લંબ}\times\text{પાયો}}{૨}=\text{ક્ષેત્રફળ. માટે પાયો}=\frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{લંબ}}\times૨.$$

ગોળનું ક્ષેત્રફળ.

ગોળના વ્યાસને પરીઘનું ગુણોત્તર ૭:૨૨ એ પ્રમાણમાં છે. એટલે વ્યાસ ૭ ફુટ હોય તો પરીધ ૨૨ ફુટ હોય. પણ એ પ્રમાણથી વધારે લગભગ પ્રમાણ ૧૧૩=૩૫૫ અથવા ૧:૩·૧૪૧૬ અથવા ૧:૩·૧૪૧૫૯૨૬૫૩૫૮૯.‡ છેલ્લું પ્રમાણ ખરાની લગભગ છે, પણ તે લાંબુ હોવાથી હિસાબ ગણવામાં પેહેલાં ત્રણ પ્રમાણ લેવાય છે. તેમાં પણ વિશેષે ત્રીજું પ્રમાણ લેવાય છે.

---

‡ આ પ્રમાણોની સત્યતા ત્રિકોણમીતીની રીતે સિદ્ધ થશે.

કોઇ ગોળનું ક્ષેત્રફળ તેના પરીધના ચોથા ભાગ જેટલી લંબાઇના ને વ્યાસ જેટલી પોહોળાઇના કાટખુણ ચોખુણના ક્ષેત્રફળ બરાબર છે* માટે ગોળનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો પરીધને વ્યાસના ગુણાકારને ચારે ભાગવા. અથવા પરીધના અર્દ્ધને વ્યાસના અર્દ્ધે ગુણવા.

ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીધ}}{\text{૪}}$ પણ પરીધ=વ્યાસ×૩·૧૪૧૬ છે માટે

$$\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીધ અથવા વ્યાસ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}=\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{વ્યાસ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$$

એટલે $\frac{\text{વ્યાસનો વર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ અથવા વ્યાસનો વર્ગ $\times\frac{\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ અથવા વ્યાસનો વર્ગ × ·૭૮૫૪. મતલબ કે વ્યાસના વર્ગને ·૭૮૫૪ વડે ગુણવાથી ગોળનું ક્ષેત્રફળની કળે છે અથવા ગોળના ક્ષેત્રફળ = $\frac{\text{વ્યાસનો વર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}}{\text{૪}}$ છે. પણ ત્રિજયા વ્યાસથી અરધી છે માટે ત્રિજયાના વર્ગના ચાર ગણા = વ્યાસનો વર્ગ થાય તેથી ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{ત્રિજયાનો વર્ગ}\times\text{૩·૧૪૧૬}\times\text{૪}}{\text{૪}}$ = ત્રિજયાનો વર્ગ ×૩·૧૪૧૬ વળી ગોળના ક્ષેત્રફળ= $\frac{\text{વ્યાસ}\times\text{પરીધ}}{\text{૪}}$ પણ પરીધનો ૩·૧૪૧૬ મો ભાગ વ્યાસ છે માટે ગોળના ક્ષે. ફ.= $\frac{\text{પરીધ}\times\text{પરીધ}}{\text{૪}}\div\text{૩·૧૪૧૬}$

---

* આ રીતની સત્યતા ભૂમીતિની છઠી બૂક પ્રમાણેછે.

અથવા પરીઘનો વર્ગ÷૪×૩.૧૪૧૬. અથવા પરીઘનો વર્ગ÷૧૨.૫૬૬૪. અથવા પરીઘનો વર્ગ×.૦૭૯૫૮.

એક મોટા ગોળમાં નાનો ગોળ હોય તો તે બે ગોળના બંને પરીઘો વચ્ચે કેટલું અંતર છે અથવા નાના ગોળથી મોટા ગોળ કેટલો મોટો છે તે કહાડવું હોય તો મોટા ગોળના ક્ષેત્રફળમાંથી નાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ બાદ કરવું. એનું કારણ દેખીતું છે પણ બંને ગોળના પરીઘ આપ્યા હોય તો મોટા ગોળના ક્ષેત્રફળ−નાના ગોળના ક્ષેત્રફળ=મોટા ગોળના વ્યાસ^{2}×.૭૮૫૪−નાના ગોળનો વ્યાસ^{2}×.૭૮૫૪ અથવા મોટા ગોળના વ્યાસનો વર્ગ−નાના ગોળના વ્યાસ^{2}×.૭૮૫૪ એટલે બંને ગોળના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી×બંને ગોળના વ્યાસોના વર્ગોની બાદબાકી ×.૭૮૫૪ અથવા બને વ્યાસોના સરવાળાને તે બે વ્યાસોની બાદબાકીએ ગુણી તેને .૭૮૫૪એ ગુણવા. કેમકે કોઈપણ બે સંખ્યાનો સરવાળો ને તેજ બે સંખ્યાની બાદબાકીનો ગુણાકાર તે, તે બે સંખ્યાના વર્ગોની બાદબાકી બરાબર છે. જેમકે (૬+૪)×(૬−૪)=૬^{2}−૪^{2}=૨૦. માટે મોટા વ્યાસ^{2}−નાના વ્યાસ^{2}=(મોટા વ્યાસ+નાના વ્યાસ)×(મોટા વ્યાસ−નાનો વ્યાસ)

ઘનફળ.

જેમ સપાટ જગાના માપને ક્ષેત્રફળ કહે છે, તેમ નક્કર પદાર્થના ઘન માપને ઘનફળ કહે છે. નક્કર પદાર્થને લંબાઈ, પહોળાઇ ને જાડાઈ હોય છે. થાંભલો, મોભ, શંકુ, ગોળો, એ નક્કર પદાર્થ છે. એ પદાર્થો પ્રીઝમ, ઘન, વર્તુળ, શંકુ, ગોળ, વગેરે આકાર હોય છે.

કાટખુણ પ્રીઝમનું ઘનફળ કહાડવું હોય તો તેની લંબાઈ, પહોળાઇ, ને જાડાઇનો ગુણાકાર કરવો. કારણ—સપાટ સફાઇના આકારનું મા-

૫ ચોરસ માપથી મપાય છે, ને ઘ નક્કર પદાર્થ ઘનમાપથી મપાય. ઘન માપ એટલે જે માપ લંબાઇમાં, પહોળાઈમાં, ને જાડાઇમાં સરખું હોય. જેમકે એક ઘનઇંચ એટલે એક ઇંચ લાંબું એક ઇંચ પહોળું ને એક ઇંચ જાડું. એક ઘનફૂટ એટલે એક ફૂટ લાંબું, એક ફૂટ પહોળું ને એક ફૂટ જાડું. હવે એક નક્કર પદાર્થ કાટખુણ પ્રીઝમ હોય ને તે ૪ ફૂટ લાંબો, બે ફૂટ પહોળો ને ત્રણ ફૂટ ઉંચો અથવા જાડો હોયતો તેમાંથી કેટલા ઘનફૂટ નીકળે? ચાર ફૂટ લંબાઇમાંથી એક ફૂટ લાંબા કકડા કહાડીએ તો ચાર થાય પણ તે ત્રણ ફૂટ લાંબા ને ૨ફૂટ પહોળા હોય. હવે પહોળાઈ પણ એકેક ફૂટ રહે એવા કકડા કરે તો બધા મળીને ૮ થાય, પણ તે દરેક ત્રણ ફૂટ જાડા હોય. માટે દરેક એક એક ફૂટ જાડો રહે એવા કરે તો બધા મળીને દરેક એક ફૂટ લાંબો એક ફૂટ પહોળો ને એક ફૂટ જાડો એવા ૨૪ કકડા થાય. ને એ ૨૪ તે ૪ ફૂટ લંબાઈ ૨ ફૂટ એ પહોળાઇ ને ત્રણ ફૂટ જાડાઈના ગુણાકારની બરોબર થાય છે.

ઘન આકારનુ ઘનફળ તેની એક બાજુના ઘનની બરોબર છે. કેમકે ઘન આકારની લંબાઈ, પહોળાઇ ને જાડાઇ સરખી છે, માટે એ ત્રણનો ગુણાકાર તે એક બાજુના ઘનની બરોબર થવો જોઇએ. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદર્થનું ઘનફળ કહાડવું હોય તો પાયાના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણવા. કેમકે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થ એ કાટખુણ પ્રીઝમનું અરધ છે ને તેનું ઘનફળ તેની લંબાઈ×પહોળાઇ×ઉંચાઈ છે એટલે એક બાજુના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણવાથી આવે છે. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થના પાયાનું ક્ષેત્રફળ તે તેની લંબાઈ ને પહોળાઇના ગુણાકારનું અરધ છે, માટે તેને ઉંચાઇએ ગુણીશું તો ગુણાકાર

કાટખુણ પ્રીઝમના ધનફળના અરધ જેટલો આવશે, એટલે તે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થનું એટલે કાટખુણ પ્રીઝમનું અર્ધનું ધનફળ થતું જોઈએ.

ગોળ થાંભલાનું ધનફળ તેના પાયાના ક્ષેત્રફળને ઉંચાઇએ ગુણવાથી આવે છે, કેમકે એ ગોળ થાંભલો બધેથી સરખો હોવાને લીધે પાયાના ક્ષેત્રફળ જેટલુંજ માપ છેવટ સુધી હોય છે.

કોઈ શંકુ આકારનું ધનફળ કહાડવું હોય તો તેના પાયાના ક્ષેત્રફળને ઉચાઈએ ગુણી ત્રણે ભાગવા, કેમકે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થ જેમ કાટખુણ પ્રીઝમનો અરધો ભાગ છે તેમ શંકુ આકાર નક્કર પદાર્થ કાટખુણ પ્રીઝમનો ત્રીજો ભાગ છે. એટલે કાટખુણ પ્રીઝમના ત્રિકોણાકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો ૨, ને શંકુ આકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો ત્રણ થાય છે.*

ટીકા—શંકુનો પાયો ગોળજ હોય એમ નથી. ત્રિકોણકાર, ચોરસ વગેરે જાતનો પણ હોય. માટે જે જાતનો પાયો હોય તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી ઉંચાઈએ ગુણવાથી તે શંકુનું ધન ફળ આવશે.

ગોળાનું ધનફળ.

બધી તરફથી સરખો ગોળ હોય તેને ગોળો કહેછે. એ ગોળો બંને તરફથી ખુલ્લા *એવા એક ભુંગળામાં રહે તો તે ભુંગળાનાં

---

* આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇ શકેછે, માટે તે આ જગાએ લખવી નકામી છે. પણ એક કાટખુણ પ્રીઝમ લઇ તેના ત્રિકોણાકાર ને શંકુ આકાર નકર ભાગ કરી જોયાથી શીખનારની ખાતરી થશે.

* આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇ શકેછે.

ઘનફળનું $\frac{૨}{૩}$ ઘનફળ એ ગોળનું થાયછે એવા ભુંગળાને સીલીંડર કહે છે. એ સીલીંડરની ઊંચાઇ અને ગોળાનો વ્યાસ સરખો હોવો જોઇએ. તેમજ સીલીંડરના ગોળનો પરીઘ ને ગોળાના પરીઘ પણ સરખો હોયછે.

ગોળાનું ઘનફળ કહાડવું હોય તો ગોળાના પૃષ્ટફળને આંસે (વ્યાસે) ગુણી તેના $\frac{૧}{૬}$ લેવા અથવા છ એ ભાગવા.

કારણ—સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોય તો સીલીંડરના પરીઘને ઊંચાઇએ ગુણવા. અથવા વ્યાસના વર્ગને ૩·૧૪૧૬ એ ગુણવા. કેમકે ઊંચાઈ ને વ્યાસ સરખાં છે. પણ વ્યાસના વર્ગને ૩·૧૪૧૬ એ ગુણી ચારે ભાગે તો સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ આવે માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^{૨} \times ૩\cdot૧૪૧૬}{૪}$=સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ તેને ઉંચાઈએ અથવા વ્યાસે ગુણે તો તે સીલીંડરનું ઘનફળ આવે. માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^{૨} \times ૩\cdot૧૪૧૬ \times \text{વ્યાસ}}{૪}$×વ્યાસ=સીલીંડરનું ઘનફળ, અથવા તેના $\frac{૨}{૩}$ તે ગોળાનું ઘનફળ માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^{૨} \times ૩\cdot૧૪૧૬ \times \text{વ્યાસ}}{૪}$ ના $\frac{૨}{૩}$= વ્યાસ^{૨}×૩·૧૪૧૬×વ્યાસના $\frac{૧}{૬}$ એ ગોળાનું ઘનફળ. પણ વ્યાસ^{૨}× ૩·૧૪૧૬ એ ગોળાનું પૃષ્ટફળ છે માટે ગોળાનું પૃષ્ટફળ×વ્યાસ (આંસ) ના $\frac{૧}{૬}$=ગોળાનું ઘનફળ આવે.

અથવા વ્યાસ^{૨}×૩·૧૪૧૬× વ્યાસના $\frac{૧}{૬}$ અથવા વ્યાસ^{૩}× ૩·૧૪૧૬ના $\frac{૧}{૬}$ એ ગોળાનું ઘનફળ આવે પણ ૩·૧૪૧૬ ના $\frac{૧}{૬}$= ·૫૨૩૬ છે માટે વ્યાસ^{૩}×·૫૨૩૬=ઘનફળ.

પરીધ×વ્યાસ=સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ એટલેઃ—

$\frac{\text{પરીધ}\times\text{પરીધ}}{3.1416}=\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416}$ સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ પણ $\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416}\div 4$ એ સીલીંડરના પાયાના ગોળાનું ક્ષેત્રફળ છે તેને વ્યાસે ગુણે તો સીલીંડરનું ઘનફળ આવે માટે $\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416\times 4}\times$ વ્યાસ અથવા

$\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416\times 4}\times\frac{\text{પરીધ}}{3.1416}=\frac{\text{પરીધ}^3}{(3.1416)^2\times 4}$ સીલીંડરનું ઘનફળ.

તેના $\frac{2}{3}$ તે ગોળાનું ઘનફળ માટે $\frac{\text{પરીધ}^3}{(3.1416)^2}$ ના $\frac{1}{4}$ ના $\frac{2}{3}=\frac{\text{પરીધ}^3}{(3.1416)^2}$

ના $\frac{1}{6}$ ગોળાનું ઘનફળ. માટે ગોળાના ઘનફળ $=\frac{\text{પરીધ}^3}{59.214136}$ અથવા પરીધના ઘનના $\frac{1}{59.214136}$ અથવા પરીધ$^3\times .01688$

ઉપરની સિદ્ધતા બીજી રીતે કરીએતો—

ગોળના ઘનફળ=વ્યાસ$^3\times .5236$ પણ વ્યાસ કરતાં પરીધ 3.141583 ગણો છે માટે વ્યાસના ઘન કરતાં પરીધનોઘન$(3.1416)^3$ ગણો વધારે આવે માટે વ્યાસના ઘનને .5236 વડે ગુણવાના છે તેને બદલે પરીધના ઘનને $(\frac{.5236}{3.1416})^3$ વડે ગુણવાના આવે પણ $(\frac{.5236}{3.1416})^3$ તે .01688 છે માટે વ્યાસના ઘનને .01688 ગુણવા.

પૃષ્ટફળ.

નક્કર આકૃતિઓની સપાટીના ક્ષેત્રફળને પૃષ્ટફળ કહેછે. ગોળાની સપાટી એક હોય પણ પેટીને ૬ હોય. જ્યારે ઘણી સપાટ

સફાઈ હોય તો તે બધી સફાઇના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરવાથી તે આકૃતિનું પૃષ્ટફળ નીકળે. પેટીની છએ બાજુનું જુદું ક્ષેત્રફળ કહાડી સરવાળો કરવાથી પેટીની બધી સપાટીઓનું પૃષ્ટફળ થાય. જ્યારે લંબાઇ, ઉંચાઈ ને પહોળાઇ જુદી જુદી હોય ત્યારે એ પ્રમાણે કરવું પડે. પણ ત્રણે માનાં સરખાં હોય તો એક તરફનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું તેટલુંજ બધી બાજુનું હોય, માટે તે ક્ષેત્રફળના છ ગણા કરવાથી તે પદાર્થનું પૃષ્ટફળ આવે. લંબાઇ, પહોળાઇ ને ઉંચાઈ સરખી હોય એવા પદાર્થને ઘન કહેછે. ઘનને પણ છ બાજુ હોય છે, માટે તેના એક તરફના ક્ષેત્રફળના છ ગણા કરવાથી તે ઘનનું પૃષ્ટફળ આવી રહે છે.

ગોળાનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોય તો તે ગોળાના વ્યાસને પરીઘનો ગુણાકાર કરવા.

કારણ—એક ગોળાનું પૃષ્ટફળ તેને ફરતા સીલીંડરના પૃષ્ટફળની બરાબર *છે. અને સીલીંડરનું પૃષ્ટફળ તેના પાયાના ગોળના પરીઘને ઉંચાઇએ ગુણવાથી આવે છે. આ સિદ્ધતા તે ભૂંગળાને ઉકેલી જોયાથી માલમ પડશે. કેમકે એ ભૂંગળાને ઉકેલ્યાથી ચોખંડું થશે તેથી તેની ઉંચાઇ તે લંબાઈ ને પાયાના ગોળનો પરીઘ તે પહોળાઇ થશે એટલે તે ભુંગળાના પત્રાનું ક્ષેત્રફળ, લંબાઈ ને પહોળાઇના ગુણાકાર બરાબર છે એવું આપણે પાછળ સિદ્ધ કરી ગયા, માટે તે પહોળાઈ એ પરીઘ ને ઉંચાઈ એટલે વ્યાસનો ગુણાકાર તે સીલીંડરનું ક્ષેત્રફળ, ને તેટલુંજ ક્ષેત્રફળ એ સીલીંડરમાં માઈ રહે એવા ગોળાનું હોય છે. માટે તે ગોળાના વ્યાસ ને પરી-

---

* નક્કર ભૂમીતિની સહાયતાથી આ સિદ્ધતા સિદ્ધ થશે.

ધનો ગુણાકાર તે ગોળાનું પૃષ્ટફળ થશે.

એટલે ગોળાના પૃષ્ટફળ=પરીઘ×વ્યાસ.

અથવા ॥ ॥ $=\frac{\text{પરીઘ}\times\text{પરીઘ}}{3\cdot1416}=\frac{\text{પરીઘ}^2}{3\cdot1416}$

અથવા ॥ ॥ =વ્યાસ×૩·૧૪૧૬×વ્યાસ=વ્યાસ^2 ×૩·૧૪૧૬

શંકુનું પૃષ્ટફળ કહાડવું હોય તો તેના પાયાના પરીઘને શંકુની તીરકસ બાજુના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું, કેમકે શંકુ ગોળ હશે તો તેનું પૃષ્ટફળ તેવા ગોળ થાંભલાના પૃષ્ટફળથી અથવા બાજુવાળો હશેતો તેનાં પૃષ્ટોનું પૃષ્ટફળ તેવા પ્રીઝમના પૃષ્ટફળથી અરધું થશે. પછી તેમાં પાયાનું પૃષ્ટફળ ઉમેરવાનું હોયતો જુદું ઉમેરવું.

ગોળ થાંભલાનું પૃષ્ટફળકહાડવું હોય તો તેના પાયાના પરીઘને ઉંચાઈએ ગુણવા. પણ તેમાં પાયાનું ક્ષેત્રફળ ઉમેરવું હોય તો તે કહાડીને ઉમેરવું. આની સિદ્ધતા સીલીંડરના પૃષ્ટફળની સિદ્ધતા જેવીજ છે.

મિશ્રરાશિ.

એક જાતની જુદા જુદા ભાવની ચીજો મિશ્ર કરી તે શા ભાવે વેચવાથી સરભર થાય, કિંવા અમુક નફો મળે તે ખોળી કહાડવાની રીતને મિશ્રરાશિ કહેછે.

એ રીતના દાખલા જુદી જુદી ત્રિરાશિઓ કરવાથી થાય છે પણ તે સાંકળ રીતિ કે પંચરાશિની રીતે ગણવાથી વખત ને મહેનત વધારે પડેછે તે બચાવવા માટે મિશ્રરાશિ છે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું વજન આપ્યું હોય તે પરથી મિશ્રનો દર કહાડવો હોય તો દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર કરવો. એ ગુણાકારોના સરવાળાને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા તે જવાબ. એ જવાબ સરભર ભાવ આવશે એટલે નફો તોટો ન જાય એવો ભાવ આવશે, પણ નફો લેવો હોય તો બધા ગુણાકારોના સરવાળામાં તેટલો નફો મેળવીને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા.

કારણ—એક ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે ભાવ ને વજનનો ગુણાકાર તે, તે વજનની કીમત થશે. કેમકે ૪રૂ ના ભાવનું ૫ મણ એટલે ૪×૫=૨૦ એ ૫ મણની કીમત થઇ. તેજ પ્રમાણે દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર તે વજનની કીમત આવશે એટલે બધા ગુણાકારોનો સરવાળો તે, બધા વજનના સરવાળાની કુલ કીમત થઈ. માટે તે કુલ કીમતને કુલ વજને ભાગ્યા તો મિશ્ર એક મણની કીમત આવશે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું મિશ્ર અમુક ભાવે પાડવું હોય તો તે વસ્તુઓ કેટ કેટલી લેવી એમ કહે તો–તે બધા ભાવને ઉભી હારમાં લખી જે મિશ્રનો ભાવ હોય તે એ બધા ભાવની ડાબી બાજુએ લખવો. પછી તે મિશ્ર ભાવ કરતાં એક ભાવ ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેઈ સરખાવવા એટલે મિશ્રને ઓછા ભાવની બાદબાકી વત્તા ભાવ આગળ અને મિશ્રને વત્તા ભાવની બાદબાકી ઓછા ભાવ આગળ એમ લખવું. એજ રીતે બીજા બે ભાવ લેઇ લખવું. એ પ્રમાણે મિશ્ર કરતાં એક ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેવો. જો મિશ્ર કરતાં એકભાવ ઓછો ને બાકીના બધા ભાવ વત્તા હોય તો તે ઓછો ભાવ દરેક વત્તા ભાવ સાથે સરખા-

વવામાં આવશે તેમજ એક વત્તો ને બીજા ઓછા હોય તોપણ તેમજ થશે. મતલબ કે મિશ્રના ભાવ કરતાં એક વત્તો કે એક ઓછો ભાવ તો હોવોજ જોઈએ. બધા વત્તા કે બધા ઓછા ભાવ હોયજ નહીં. પછી દરેક ભાવ આગળ જે બાદબાકીઓ મૂકી હોય તેનો સરવાળો લેવો. એ દરેક સરવાળા જેટલું દરેક ભાવનું વજન આવશે.

કારણ—એક ભાવ ઓછો અને એક ભાવ વત્તો લેવાથી ઓછે ભાવે લીધેલો માલ મિશ્રને ભાવે વેચાવાથી જેટલો નફો રહે છે તેટલીજ ખોટ વત્તે ભાવે લેઈ મિશ્રને ભાવે વેચવાથી જાયછે. તેથી દરેક વખતે સરભર થઇ રહે છે.

ટીકા—આવા દાખલાના જવાબ એક કરતાં વધારે આવશે, કેમકે એક જવાબ કહાડયા પછી તેને કોઈ પણ સંખ્યાએ ગુણવાથી અથવા ભાગવાથી નફો નુકશાન બરાબર રહેછે.

પણ ઉપલી જાતના હિસાબમાં કોઇ અમુક જાતના ભાવનું વજન આપ્યું હોય તો તે પ્રમાણમાં બીજા ભાવનું વજન, લેવું જોઇએ. એટલે ઉપરની રીત પ્રમાણે દરેક ભાવનું વજન કહાડયા પછી જે ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે વજન, તે ભાવનું જેટલું વજન આવે તે કરતાં જેટલા ગણું વત્તું કે ઓછું હોય તેટલા ગણું વત્તું કે ઓછું દરેક ભાવનું લેવું જોઈએ એ ઉઘાડુંજ છે.

તેમજ દરેક જાતનું કેટ કેટલું વજન લેવું કે કુલ મિશ્રનું અમુક વજન થાય એમ કહેલું હોય તો ઉપરની રીતે દરેક ભાવનું વજન કહાડી પછી તેનો સરવાળો કરવો. એ સરવાળા કરતાં કુલ

આપેલું વજન જેટલા ગણું હોય તેટલા ગણું દરેક ભાવનું વધારે લેવું જોઇએ એ પણ સ્પષ્ટ છે.

શ્રેઢી.

જો કેટલીક સંખ્યા અમુક નિયમ પ્રમાણે વધે અથવા ઘટે તો તે સંખ્યાના જથાને શ્રેઢી કહે છે. એ શ્રેઢી બે પ્રકારની છે. ગણિત પ્રમાણ ને ભૂમીતિ પ્રમાણ. જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યા કોઈ સરખે અંતરે વધે અથવા ઘટે ત્યારે તે શ્રેઢીને ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢી કહે છે; ને જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યાઓ પહેલી કરતાં બીજી ને બીજી કરતાં ત્રીજી અમુક ગણી વધે અથવા ઘટે, ત્યારે તે શ્રેઢીને ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી કહેછે. જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યા એક કરતાં બીજી વધારે અથવા ચઢતી હોય ત્યારે તેને ચઢતી શ્રેઢી, ને શ્રેઢીની સંખ્યા એક કરતાં બીજી ઓછી અથવા ઉતરતી હોય ત્યારે તેને ઉતરતી શ્રેઢી કહે છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢી.

શ્રેઢીમાં પહેલું પદ હોય તેને આદિપદ, છેલ્લા પદને અંતપદ, એક કરતાં બીજું જેટલું કે જેટલા ગણું વધારે હોય તેને ઉત્તર કે ગુણોત્તર, શ્રેઢીમાં જેટલી સંખ્યા હોય તેને પદ સંખ્યા કે ગચ્છ અને એ બધી સંખ્યાના સરવાળાને સર્વધન કહે છે. મતલબ શ્રેઢીમાં આદિપદ, અંતપદ, ઉત્તર, ગચ્છ, ને સર્વધન એ પાંચ વાનાં હોય છે. એ પાંચમાંનાં કોઇ પણ ત્રણ આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનાં નીકળી શકે છે. ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪, ૧૭, ૨૦ એ સાત સંખ્યાની શ્રેઢીમાં ૨ આદિપદ, ૨૦ અંતપદ, ૩ ઉત્તર, ૭ ગચ્છ ને

એ બધીનો સરવાળો ૭૭ એ સર્વધન છે.

શ્રેઢીનાં પાંચમાંનાં ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તો બાકીનાં કહાડવાની રીતો છે, તે સમજાવતા પહેલાં શ્રેઢીની સંખ્યાના ગુણ જાણવા જોઇએ. એ ગુણ સમજ્યાથી શ્રેઢીની રીતોનાં કારણ જલદીથી સમજાશે.

૧ શ્રેઢીની દરેક આગલી સંખ્યા તેની પહેલાંની સંખ્યા કરતાં અમુક સંખ્યા વધારે હોય છે. એટલે પહેલી સંખ્યામાં ઉત્તર મેળવીએ તો બીજી સંખ્યા, અને બીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર બે વાર મેળવીએ એટલી ત્રીજી સંખ્યા હોય છે. ત્રીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર ત્રણ વાર મેળવીએ એટલી ચોથી સંખ્યા હોય છે. એ પ્રમાણે જેટલામી સંખ્યા કહાડવાની હોય તેમાંથી એક બાદ કરીએ તેટલી વાર ઉત્તર પહેલીમાં મેળવીએ તેટલી તે સંખ્યા હોય છે. જેમકે ઉપલી શ્રેઢીમાં પહેલી ૨ છે ને દશમી સંખ્યા કહાડવી હોય તો ૧૦-૧=૯ વાર ઉત્તર લેઇએ તો ૨૭ થાય તેટલામાં ૨ મેળવીએ તો ૨૯ એ દશમી સંખ્યા આવે. પણ જો ઉતરતી શ્રેઢી હોય તો પહેલી સંખ્યામાંથી જેટલામી સંખ્યા કહાડવી હોય તેમાંથી એક ઓછો એટલીવાર ઉત્તર બાદ કરવાથી આવે. જેમકે ઉપરનાજ દાખલાને ઉલટાવીએ ને પહેલી સંખ્યા ૨૯ લઇએ ને દશમી સંખ્યા કહાડવી હોય તો ૧૦-૧=૯ ને ઉતર ગણુ લેઈ ૨૯ માંથી બાદ કરીશું તો દશમી સંખ્યાં ૨ આવશે. એટલે ચઢતી શ્રેઢીમાં પહેલી સંખ્યામાં ઉમેરવા ને ઉતરતી શ્રેઢીમાં બાદ કરવાથી તે સંખ્યા નીકળશે. હવે જેટલામી

સંખ્યા કહાડવી હોય તેને અંતપદ ગણીએ તો ચઢતી શ્રેઢીમાં અંતપદ =આદિપદ +(ગચ્છ−૧)× ઉત્તર આ પ્રમાણે કોઠો થયો. પણ ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ=આદિપદ−(ગચ્છ−૧)× ઉત્તરઆવો કોઠો થયો.

૨ વળી ગચ્છ−૧ને ઉત્તરે ગુણી આદિપદમાં ઉમેરવાથી અંતપદ આવે છે. એ રીત ઉપરથી બે સંખ્યાની વચમાં ગમે તેટલાં સરખા અંતરનાં પદ મૂકવાથી ઉત્તર કેટલું રાખવું તે કહાડી શકાય છે. કેમકે (ગચ્છ−૧)×ઉત્તર+આદિપદ=અંતપદ છે. હવે આદિપદને અંતપદ આપ્યું હોય તો અંતપદમાંથી આદિપદ બાદ કરીશું તે (ગચ્છ−૧)×ઉત્તર રહેશે. તેને ગચ્છ−૧ વડે ભાગીએ તો ઉત્તર આવે. ઉપલાજ દાખલામાં ૨ ને ૨૯ ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હોય તો કુલ ૧૦ ગચ્છ સંખ્યા થઇ. તેમાંથી એક બાદ કર્યો તો ૯ રહ્યા તેણે ૨૯−૨ ને ભાગ્યા તો ૩ ઉત્તર આવ્યા અથવા ઉતરતી શ્રેઢી હોય તો આદિપદમાંથી અંતપદ બાદ કરી તેને નવે ભાગીશું તો પણ ૩ ઉત્તર આવશે. એટલે ઉત્તર કહાડવું હોય તો ચઢતી શ્રેઢીમાં $\frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ}-૧}$ અને ઉત્તરતી શ્રેઢીમાં $\frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ}-૧}$

૩. જો ઉપરનીજ શ્રેઢીમાં ગચ્છ સંખ્યા કહાડવી હોય તોપણ નીકળશે. કેમકે ઉત્તરને ગચ્છ−૧ ગુણી આદિપદમાં મેળવ્યાથી અંતપદ આવે છે. માટે અંતપદમાંથી આદિપદ બાદ કરી ઉત્તરે ભાગીએ તો ગચ્છ−૧ આવે. માટે તે ભાગાકારમાં એક મેળવ્યાથી ગચ્છ આવશે. જેમકે ઉપરનીજ શ્રેઢીમાં અંતપદ−આદિપદ=૨૭ છે તેને ઉતર ૩ ભાગ્યા તો ૯ આવ્યા એ ગચ્છ−૧ ની બરોબર છે

માટે ૬+૧=ગચ્છ આવશે.

૪ એજ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોય તો પણ નીકળશે. કેમકે (ગચ્છ–૧)×ઉત્તર આદિપદમાં મેળવવાથી અંતપદ આવેછે. માટે અંતપદમાંથી (ગચ્છ–૧)×ઉત્તર બાદ કરવાથી આદિપદ આવશે એટલે આદિપદ=અંતપદ–(ગચ્છ–૧)×ઉત્તર.

૫ વળી શ્રેઢીમાં ત્રણ પદ હોય તો પહેલા ને છેલ્લાનો સરવાળો વચલાની બમણાઈ બરાબર થાય. ૨, ૫, ૮ આ શ્રેઢીમાં ૨+૮=૫×૨ છે માટે વચલું પદ કહાડવું હોય તો, પહેલા ને છેલ્લાના સરવાળાને બેએ ભાગવાથી નીકળશે. પણ એક કરતાં વધારે પદો બે સંખ્યાની વચમાં મૂકવા હોય તો–આપેલી બે સંખ્યામાંની એક આદિપદ અને બીજી અંતપદ થશે. એ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું જોઇએ. જેમકે ૨ ને ૨૯ ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હોય તો કુલ દશ પદ સંખ્યા થશે. ને તે ઉપરથી પાછળ કહ્યા પ્રમાણે ઉત્તર કહાડવું તો ત્રણ આવશે. માટે પહેલી સંખ્યા ૨ તો બીજી ૫, ત્રીજી ૮, ચોથી ૧૧, પાંચમી ૧૪, છઠી ૧૭, સાતમી ૨૦, આઠમી ૨૩, નવમી ૨૬ આવશે.

૬ શ્રેઢીમાંની પહેલી ને છેલ્લીનો સરવાળો બીજી ને છેલ્લીની પહેલીના સરવાળા બરાબર છે. કેમકે પહેલી કરતાં બીજી જેટલી વધારે હોય તેટલીજ છેલ્લીની પહેલી કરતાં છેલ્લી વધારે હોય છે. તેમજ વળી પહેલી ને છેલ્લીનો સરવાળો, પહેલેથી ત્રીજીને છેલ્લેથી ત્રીજી લેઇએ તેના સરવાળા બરાબર છે. એ પ્રમાણે પહેલેથી જેટલામી સંખ્યા લેઈએ તેટલામીજ છેલ્લેથી લેઇ સરવાળો કરીશું તે,

આદિ અંતના સરવાળા બરાબર થશે. એ પ્રમાણે પદ સંખ્યાનાં જેટલાં જોડકાં કરીશું તે જોડકાનો સરવાળો સરખો થશે. જેમકે ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪, ૧૭, ૨૦, ૨૩, ૨૬, ૨૯, આ દશ પદ સંખ્યાનાં ૨ને ૨૯, ૫ને ૨૬, ૮ને ૨૩, ૧૧ને ૨૦, ૧૪ને ૧૭, એવાં પાંચ જોડકાં થશે તે દરેકનો સરવાળો ૩૧ થશે. માટે ૩૧ને પાંચ ગણા કરીશું તો એ દશે સંખ્યાનો સરવાળો થવાનો. એટલે ૩૧×૫ =૧૫૫ એ દશે પદનો સરવાળો અથવા સર્વધન આવ્યું. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઇ શ્રેઢીનો સરવાળો કહાડવો હોય તો આદિ ને અંતના સરવાળાને પદ સંખ્યાનાં જોડકાની સંખ્યાએ ગુણવા એટલે સર્વધન=(આદિપદ+અંતપદ)× $\frac{\text{ગચ્છ.}}{૨}$ પણ જો અંતપદ ન આપ્યું હોય તો પહેલી રીત પ્રમાણે અંતપદ કહાડીને પછી ઉપરની રીતે સર્વધન કહાડવું.

૭ પણ જો આદિપદ ૧ એક હોય ને ઉત્તર બે હોય તો ગમે તેટલી સંખ્યાનું સર્વધન તે સંખ્યાના વર્ગ જેટલું આવશે. જેમકે આદિપદ ૧, ઉત્તર ૨ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન વીશના વર્ગ જેટલું ૪૦૦ આવશે.

૮ તેમજ આદિપદ કરતાં ઉત્તર બમણું હોય તો જેટલી સંખ્યાનું સર્વધન કહાડવું હોય તે સંખ્યાના વર્ગને આદિપદે ગુણવાથી આવશે. જેમકે આદિપદ ૪ ને ઉત્તર ૮ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન $૨૦^{૨} \times ૪ = ૧૬૦૦$ આવશે. ઉપરની સાતમી ને આઠમી રીતની સિદ્ધતા છઠી રીતે સર્વધન કહાડી જોયાથી માલમ પડશે. કેમકે ઉપરની રીતે અંતપદ=આદિપદ+(ગચ્છ−૧)×ઉત્તર, માટે અં-

તપદ=૪+(૨૦-૧)×૮=૪+૧૫૨=૧૫૬. તે ઉપરથી સર્વધન=૮ (આદિ+અંત)×ગચ્છ/૨=(૪+૧૫૬)×૨૦/૨=૧૬૦×૧૦=૧૬૦૦

ઉપર જે કોઠાઓ સમજાવ્યા તે આ નીચે સામટા લખ્યા છે કે યાદ કરવાને સુગમ પડે.

૧ ચઢતી શ્રેઢીમાં અંતપદ =આદિપદ+(ગચ્છ-૧)×ઉત્તર.
ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ=આદિપદ-[ગચ્છ-૧]×ઉતર.

૨ ચઢતી શ્રેઢીમાં ઉત્તર $=\frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ}-1}$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં ઉત્તર $=\frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ}-1}$

૩ ચઢતી શ્રેઢીમાં ગચ્છ $=\frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ઉત્તર}}+1$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં ગચ્છ $=\frac{\text{આદીપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ઉત્તર}}+1$

૪ ચઢતી શ્રેઢીમાં આદિપદ=અંતપદ-(ગચ્છ-૧)×ઉતર.
ઉતરતી શ્રેઢીમાં આદિપદ=અંતપદ+(ગચ્છ-૧)×ઉતર.

૫ ચઢતી શ્રેઢીમાં સર્વધન=(આદિપદ+અંતપદ)×ગચ્છ/૨

ઉતરતી શ્રેઢીમાં સર્વધન એટલુંજ આવશે તે એજ રીતે નીકળશે.

શ્રેઢીનાં પાંચ વાનાંમાંથી કોઇપણ એક કહાડવું હોય તો ઉપરની રીતોની મદદથી નીકળશે. પણ ઉપરની રીતમાં જરૂર પડે એટલાં પદ ન આપ્યાં હોયતો માગેલું પદ કહાડતાં લગાર અડચણ પડે છે.

માટે એ ઉપલા પાંચ કોઠાની મદદથી દરેક વાતું કહાડવાને જુદી જુદી રીતે બીજા કોઠા આ નીચે ઉત્પન્ન કરી બતાવ્યા છે. એ કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થયા છે, તે સમજ્યાથી તે કોઠા જલદી યાદ રહેશે, અને ભૂલી જશે, તો ફરીને ઉત્પન્ન કરી શકશે.

૬. જો આદિ,‡ ગચ્છ ને સર્વધન ઉપરથી અંત કહાડવું હોયતો*

આપણે છઠી કલમમાં કહી ગયા કે આદિપદ ને અંતપદના સરવાળાને પદ સંખ્યાના અર્ધે ગુણીએ, તો સર્વધન આવે. એટલે પદ સંખ્યાએ ગુણે તો સર્વધનના બમણા આવે. માટે સર્વધનના બમણાને પદ સંખ્યાએ ભાગે તો આદિપદ ને અંતપદનો સર્વાળો આવે. તેમાંથી આદિપદ બાદ કરે તો અંતપદ રહે. એટલે અંતપદ= $૨\frac{\text{સર્વધન}}{\text{પદસંખ્યા}}$ – આદિપદ.

ઉતરતી શ્રેઢીમાં પણ એજ કોઠો કામ લાગશે, કેમકે ઉતરતી શ્રેઢીમાં અંતપદ નાનું હોય, તેમ બાદ કરવાતું આદિપદ મોટું હોયજ.

૭. વળી ઉત્તર, ગચ્છને સર્વધન ઉપરથી અંતપદ કહાડવું હોય તો–

અં.= $\frac{\text{૨સ.}}{\text{ગ}}$ –આ. ઉપર સિદ્ધ કરી ગયા, પણ આદિપદ આપ્યું નથી. માટે ઉપરનો ચોથો કોઠો આદિપદને બદલે મૂકયાથી અં=

---

‡ કોઠા લખવામાં લંબાણ ન થાય, માટે સર્વધનને બદલે સ. આદિપદને બદલે આ, અંતપદને બદલે અં ગચ્છ ને બદલે ગ. ને ઉત્તરને બદલે ઉ. લખેલું છે.

* આ સિદ્ધતા માત્ર સમીકરણ શીખેલાજ સમજી શકે તેવી છે, તોપણ તે શીખેલા સમજી શકે, માટે આપીછે.

$\frac{૨સ.}{ગ.}$-(અં.-(ગ.-૧)×ઉ) કૌંસ છોડાવ્યાથી અં.=$\frac{૨સ.}{ગ.}$-અં.+(ગ.-૧)×ઉ. અંતપદ સ્થળાંતર કર્યાથી ૨ અં=$\frac{૨સ.}{ગ.}$+(ગ.-૧)×ઉ. ∴

અ=$\frac{\frac{૨સ}{ગ}+(ગ.-૧)×ઉ.}{૨}$

ઉતરતી શ્રેઢીમાં અં=$\frac{\frac{૨સ}{ગ.}-(ગ.-૧)×ઉ.}{૨}$

૮. આદિપદ, સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી અંતપદ કહાડવું હોય તો–

૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે અં=$\frac{૨સ}{ગ.}$-આ. પણ ગ=$\frac{અં-આ}{ઉ}$+૧ છે તે ગ. ને બદલે લખ્યા તો અં=$\frac{૨સ}{\frac{અં-આ}{ઉ}+૧}$-આ. માટે અં=$\frac{૨સઉ}{અં-આ+ઉ}$-આ છેદ ઉરાડ્યા તો અં.^{૨}-અંઆ+અંઉ=૨સઉ-અં આ+આ^{૨}-આઉ. બન્ને તરફ $\frac{૧}{૪}$ઉ^{૨} ઉમેર્યા તો અં^{૨}+અંઉ+$\frac{૧}{૪}$ઉ^{૨}=૨સઉ+આ^{૨}-આઉ+$\frac{૧}{૪}$ઉ^{૨}. જમણી તરફ ઉ ગુણક કહાડ્યો તો અં^{૨}+અંઉ+$\frac{૧}{૪}$ઉ^{૨}=આ^{૨}+ઉ(૨સ-આ+$\frac{૧}{૪}$ઉ) બંને તરફનું વર્ગમૂળ કહાડ્યું તો અં+$\frac{૧}{૨}$ઉ=$\sqrt{આ^{૨}+ઉ(૨સ-આ+\frac{૧}{૪}ઉ)}$. $\frac{૧}{૨}$ઉ સ્થળાંતર કર્યાથી અં=$\sqrt{આ^{૨}+ઉ(-આ+\frac{૧}{૪}ઉ)}$-$\frac{૧}{૨}$ ઉ જ.

૯. સર્વધન અંતપદ અને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોયતો– સ.=(આ.+અં.)×$\frac{ગ.}{૨}$ છે. માટે ૨×સ.=(આ+અં.)×ગ. આવે. જો બને બાજુને ગચ્છે ભાગીએ તો આ.+અં.=$\frac{૨સ}{ગ}$ થાય. બંનેમાંથી અં. બાદ કરીએ તો આ.=$\frac{૨×સ.}{ગ.}$-અં. જવાબ.

૧૦ પણ સર્વધન ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોય તો–

ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્રમાણે $\text{આ.}=\frac{\text{૨}\times\text{સ.}}{\text{ગ.}}-\text{અં.}$ છે. તેમાં અંતપદને બદલે અંતપદની કિંમત લખીએ તો $\text{આ.}=\frac{\text{૨}\times\text{સ.}}{\text{ગ.}}-\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}+\frac{(\text{ગ.}-\text{૧}\times\text{ઉ.}}{\text{૨}}$

માટે $\text{આ.}=\frac{\text{૨ સ.}}{\text{ગ.}}-\frac{(\text{ગ.}-\text{૧})\times\text{ઉ.}}{\text{૨}}$ જવાબ.

૧૧ વળી અંત, સર્વધન અને ઉતર ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોય તો $\text{ઉ}=\frac{\text{અં}^{\text{૨}}-\text{આ}^{\text{૨}}}{\text{૨સ}-\text{અં}-\text{આ}}$ છેદ ઉરાડયાથી $\text{૨સઉ}-\text{અંઉ}-\text{આઉ}=\text{અં}^{\text{૨}}-\text{આ}^{\text{૨}}$ સ્થળાંતરથી $\text{આ}^{\text{૨}}-\text{આઉ}=\text{અં}^{\text{૨}}+\text{અંઉ}-\text{૨સઉ}$ તેમાં બંને તરફ $\frac{\text{૧}}{\text{૪}}\ \text{ઉ}^{\text{૨}}$ ઉમેર્યાથી.

$\text{આ}^{\text{૨}}-\text{આઉ}+\frac{\text{ઉ}^{\text{૨}}}{\text{૪}}=\text{અં}^{\text{૨}}+\text{અંઉ}-\text{૨સઉ}+\frac{\text{ઉ}^{\text{૨}}}{\text{૪}}$. જમણી તરફ ઉ ગુણક કાહાડયાથી $\text{આ}^{\text{૨}}-\text{આઉ}+\frac{\text{ઉ}^{\text{૨}}}{\text{૪}}=\text{અં}^{\text{૨}}+\text{ઉ}(\text{અં}-\text{૨સ}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૪}})$ બંને તરફનું વર્ગમૂળ કહાડયું તો $\text{આ}-\frac{\text{ઉ}}{\text{૨}}=\sqrt{\text{અં}^{\text{૨}}+\text{ઉ}(\text{અં}-\text{૨સ}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૪}})}$ સ્થળાંતર કર્યાથી

$$\text{આ}=\sqrt{\text{અં}^{\text{૨}}+\text{ઉ}\ (\text{અં}-\text{૨સ}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૪}})}+\frac{\text{ઉ}}{\text{૨}}$$

૧૨ આદિ, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો પાંચમા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ.}=(\text{આ.}+\text{અં.})\frac{\text{ગ.}}{\text{૨}}$ આમાં અંતપદની પહેલા કોઠા પ્રમાણે કિમત લખી, તો $\text{સ}=[\text{આ}+\text{આ}+(\text{ગ.}-\text{૧})\text{ઉ.}]\frac{\text{ગ.}}{\text{૨}}$ તેથી.

$\text{સ}=[\text{૨ આદિ}+(\text{ગચ્છ}-\text{૧})\text{ઉત્તર}]\ \frac{\text{ગ.}}{\text{૨}}$ જવાબ.

૧૩ અંત, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો પાંચમા કોઠા પ્રમાણે $\text{સર્વધન}=(\text{આદિ}+\text{અંત})\ \frac{\text{ગ.}}{\text{૨}}$ એમાં આદિપદની કિંમત ચોથા કોઠા પ્રમાણે લખી. તો $\text{સ}=[\text{અં}-(\text{ગ}-\text{૧})\ \text{ઉ}+\text{અં.}]$

$\frac{ગ}{૨}$. તેથી. સ.=[૨ અંત-(ગચ્છ-૧) ઉત્તર]$\frac{ગ}{૨}$ જવાબ.

૧૪ આદિ, અંત અને ઉત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો— પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સર્વ=(અં+આ)$\frac{ગ}{૨}$ તેમાં ત્રીજા કોઠા પ્રમાણે ગચ્છને બદલે તેની કિંમત લખી, તો—

$$સ=(અં+આ)\frac{\frac{અં-આ}{ઉ}+૧}{૨}$$

ગુણી નાંખ્યા તો $સ=\frac{અં^૨-આ^૨}{૨ઉ}+\frac{અં+આં}{૨}$ જવાબ.

૧૫ આદી, સર્વધન અને ગચ્છ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોય તો.

૨ જા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર=$\frac{અં.-આ}{ગચ્છ-૧}$ ૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે અંતપદની કીમત લખી તો ઉત્તર=$\frac{\frac{૨સ}{ગ}-આદિ-આદિ.}{ગ-૧}$

તેથી ઉત્તર=$\frac{\frac{૨સ}{ગ}-૨આ}{ગ-૧}$ જવાબ.

૧૬ સર્વધન, ગચ્છ અને અંતપદ ઉપરથી ઉતર કહાડવું હોય તો ઉપરના ૧૫મા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર=$\frac{\frac{૨સ}{ગ}-૨ આ}{ગ-૧}$

એમાં નવા કોઠા પ્રમાણે આદિપદની કીંમત લખી તો

$$ઉત્તર=\frac{૨\frac{સ}{ગ}-(\frac{૪સ}{ગ}-૨ અંત)}{ગ-૧}$$

તેથી ઉત્તર=$\frac{\frac{૨સ}{ગ}-\frac{૪સ}{ગ}+૨ અંત}{ગ-૧}$ તેથી ઉત્તર=$\frac{૨અં-\frac{૨સ}{ગ}}{ગ-૧}$જ.

૧૭ આદિ, અંત અને સર્વધન ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોય તો બી-જા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર= $\frac{\text{અં.}-\text{આ}}{\text{ગ}-૧}$ છે તેમાં ગચ્છની કીમત ૧૮ મા કોઠા પ્રમાણે લખ્યાથી ઉત્તર= $\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\frac{૨\text{સ}}{\text{અં.}+\text{આ}}-૧}$ અથવા ઉત્તર= $\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\frac{૨\text{સ}-\text{અં}-\text{આ}}{\text{અં.}+\text{આ}}}$ અંશ અને છેદ બંનેને અંત+આદિએ ગુણ્યાથી ઉ-ત્તર= $\frac{\text{અં}^૨-\text{આ}^૨}{૨\text{સ}-\text{અં}-\text{આ}}$ જવાબ.

૧૮ આદી, અંત અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો. પાંચ-મા કોઠા પ્રમાણે સર્વધન =(આદી+અંત)$\frac{\text{ગ}}{૨}$ બધાને બમણા કર્યાતો ૨ સર્વધન=(આદિ+અંત) ગચ્છ. બંને તરફ આદિ+અંતે ભાગ્યા તો ગચ્છ= $\frac{૨\text{સ}}{\text{આ}+\text{અં.}}$ જવાબ.

૧૯ આદિ, ઉત્તર અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોય તો.

૩ જા કોઠા પ્રમાણે ગચ્છ= $\frac{\text{અં}-\text{આ}}{\text{ઉત્તર}}$+૧. તેમાં અંતની કીંમત આ-ઠમા કોઠા પ્રમાણે મૂકીતો—

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{\text{ઉત્તર}(૨\text{સ}-\text{આ}+\frac{૧}{૪}\text{ઉ})+\text{આ}^૨}-\frac{૧}{૨}\text{ઉ}-\text{આ}}{\text{ઉત્તર}}+૧$$

અથવા અંશ અને છેદને બેએ ગુણ્યા તો—

$$\text{ગચ્છ}=\frac{\sqrt{૪\text{ઉ}(૨\text{સ}-\text{આ}+\frac{૧}{૪}\text{ઉ})+૪\text{આ}^૨}-\text{ઉ}-૨\text{આ}}{૨\text{ ઉત્તર}}+૧ \text{ અથવા}$$

$$ગચ્છ=\frac{\sqrt{૮સ\times ઉ-૪આ\times ઉ+ઉ^{૨}+૪આ^{૨}ઉ}}{૨\ ઉત્તર}-\frac{૨આ+૨ઉ}{૨\ ઉત્તર}$$ અથવા

$$ગચ્છ=\frac{\sqrt{૮સ\times ઉ+(૨આ-ઉ)^{૨}}}{૨\ ઉત્તર}-\frac{૨આ-ઉ}{૨\ ઉત્તર}$$ જવાબ.

૨૦ અંત, સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોય તો-

૩ જા કોઠા પ્રમાણે $ગ=\frac{અં-આ}{ઉ}+૧$ એમાં ૧૧ મા કોઠા પ્રમાણે આદિપદની કીમત લખી તો—

$$ગચ્છ=\frac{અં-(\sqrt{અં^{૨}+ઉ(અં-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}+\frac{ઉ}{૨})}{ઉ}+૧$$ અથવા

$$ગ=\frac{અં-\sqrt{અં^{૨}+ઉ(અં-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}-\frac{ઉ}{૨}}{ઉ}+૧$$ અથવા

$$ગ=\frac{અં-\sqrt{અં^{૨}+ઉ(અં-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}}{ઉ}-\frac{૧}{૨}+૧$$

માટે $ગ=\frac{અં}{ઉ}+\frac{૧}{૨}-\frac{\sqrt{અં^{૨}+ઉ(અં-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}}{ઉ}$ જવાબ.

યાદ રહેવા માટે ગણિત શ્રેઢીના ઉપલા ૨૦ કોઠા નીચે લખ્યા છે.

ચઢતી શ્રેઢી.

(૧) $આ=અં-(ગ-૧)\times ઉ$. (૨) $આ=\frac{૨સ}{ગ}-અં$.

(૩) $આ=\frac{\frac{૨સ}{ગ}-(ગ-૧)\times ઉ}{૨}$

(૪) $આ=\sqrt{અં^{૨}+ઉ(અં-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}+\frac{ઉ}{૨}$ (૫) $અં=આ+(ગ-૧)\times ઉ$,

(૬) $અં = \frac{૨સ}{ગ} - આ.$ (૭) $અં = \frac{\frac{૨સ}{ગ} + (ગ-૧) \times ઉ}{૨}$

(૮) $અં = \sqrt{ઉ(૨સ - આ + \frac{૧}{૪}ઉ) + આ^{૨}} - \frac{૧}{૨}ઉ.$

(૯) $ઉ = \frac{અં - આ}{ગ-૧}$ (૧૦) $ઉ = \frac{\frac{૨સ}{ગ} - ૨આ}{ગ-૧}$ (૧૧) $ઉ = \frac{૨અં - \frac{૨સ}{ગ}}{ગ-૧}$

(૧૨) $ઉ = \frac{અં^{૨} - આ^{૨}}{૨સ - અં - આ}$ (૧૩) $ગ = \frac{અં - આ}{ઉ} + ૧$

(૧૪) $ગ = \frac{૨સ}{અં + આ}$ (૧૫) $ગ = \sqrt{\frac{૮સઉ + (૨આ - ઉ)^{૨}}{૨ઉ}} - \frac{૨આ - \frac{૨}{ઉ}}{૨ઉ}$

(૧૬) $ગ = \frac{અં}{ઉ} + \frac{૧}{૨} - \sqrt{\frac{અં^{૨} + ઉ(અં - ૨સ + \frac{ઉ}{૪})}{ઉ}}$

(૧૭) $સ = (અં + આ)\frac{ગ}{૨}$ (૧૮) $સ = [૨આ + ઉ(ગ-૧)]\frac{ગ}{૨}$

(૧૯) $સ = [૨અં - ઉ(ગ-૧)]$ (૨૦) $સ = \frac{અં^{૨} - આ^{૨}}{૨ઉ} + \frac{અં + આ}{૨}$

ઉતરતી શ્રેઢી.

(૧) $આ = અં + (ગ-૧)ઉ$ (૨) $આ = \frac{૨સ}{ગ} - અં$ (૩) $આ = \frac{\frac{૨સ}{ગ} + (ગ-૧)ઉ}{૨}$

(૪) $આ = \sqrt{૨સઉ - અંઉ + અં^{૨} + \frac{૧}{૨}ઉ^{૨}} - \frac{૧}{૨}ઉ$

(૫) $અં = આ - (ગ-૧)ઉ$ (૬) $અં = \frac{૨સ}{ગ} - આ$ (૭) $અં = \frac{૨સ}{ગ} - (ગ-૧)ઉ$

(૮) $અં = \sqrt{આ^{૨} - ઉ(૨સ - આ - \frac{૧}{૪}ઉ)} + \frac{૧}{૨}ઉ$ (૯) $ઉ = \frac{આ - અં}{ગ-૧}$

(૧૦) $ઉ = \frac{આ - અં}{૨સ - આ - અં}$ (૧૧) $ઉ = \frac{\frac{૨સ}{ગ} - ૨અં}{ગ-૧}$ (૧૨) $ઉ = \frac{૨આ - \frac{૨સ}{ગ}}{ગ-૧}$

(૧૩) $ગ=\frac{આ-અં}{ઉ}+૧$ (૧૪) $ગ=\frac{૨સ}{આ+અં}$

(૧૫) $ગ=\sqrt{\frac{૮સઉ+(૨અં-ઉ)^{૨}}{૨ઉ}}-\frac{૨અં-ઉ^{૨}}{૨ઉ}$

(૧૬) $ગ=\frac{આ}{ઉ}+\frac{૧}{૨}-\sqrt{\frac{આ^{૨}+ઉ(આ-૨સ+\frac{ઉ}{૪})}{ઉ}}$

(૧૭) $સ=(આ+અં)\frac{ગ}{૨}$ (૧૮) $સ=૨અં+(ગ-૧)\frac{ગ}{૨}$

(૧૯) $સ=(૨આ-(ગ-૧)\frac{ગ}{૨}$ (૨૦) $સ=\frac{આ^{૨}-અં^{૨}}{ઉ}+\frac{આ+અં}{૨}$

ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી.

જ્યારે કેટલીક સંખ્યાઓ એક કરતાં બીજી અમુક ગણી વધારે હોય ત્યારે તે સંખ્યાઓની શ્રેઢીને ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી કહેછે. એવી શ્રેઢીમાં એક સંખ્યા કરતાં બીજી જેટલા ગણી વધારે હોય તેને ગુણોત્તર કહે છે. જ્યારે ગુણોત્તર એક કરતાં વધારે હોય ત્યારે ઉતરતી શ્રેઢી કહેવાય છે. ૧, ૨, ૪, ૮, ૧૬, ૩૨, ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨ એ ચઢતી શ્રેઢી છે. ને ૯૭૨, ૩૨૪, ૧૦૮, ૩૬, ૧૨, ૪ એ ઉતરતી શ્રેઢી છે. પહેલીમાં ગુણોત્તર બે અને બીજીમાં ત્રણ છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢીની માફક ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢીમાં પણ શ્રેઢીના પહેલા પદને આદિ, છેલ્લા પદને અંત, પદ સંખ્યાને ગચ્છ, બધી સંખ્યાઓના સરવાળાને સર્વધન અને જેટલા ગણું પ્રમાણ હોય તેને ગુણોત્તર કહે છે.

૧. ઉપરની શ્રેઢી ઉપરથી માલમ પડશે કે કોઇ પણ ત્રણ પદો

ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો તેના પહેલા ને ત્રીજાનો ગુણાકાર વચલા પદના વર્ગની બરાબર થાય કેમકે બીજા પદ કરતાં ત્રીજું પદ જેટલા ગણું વધારે હોય તેટલા ગણું પહેલું પદ બીજા કરતાં નાનું હોયછે. ૨. તેમજ ચાર પદો ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો પહેલાને છેલ્લાનો ગુણાકાર, વચલા બેના ગુણાકાર બરાબર થશે. ૩. જે સંખ્યાઓ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તે સંખ્યાઓની બાદબાકી પણ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં થશે. ૪. જો ત્રણ સંખ્યા ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો તેમાંની પહેલી: ત્રીજી:: પહેલીનો વર્ગ: બીજીના વર્ગને. ૫. ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પહેલા પદને ગુણોત્તરે ગુણે તો બીજું પદ, ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણે તો ત્રીજું, ગુણોત્તરના ઘને ગુણે તો ચોથું, ગુણોત્તરના ચાર ઘાતે ગુણે તો પાંચમું પદ આવે છે. એ રીતે જેટલામું પદ કહાડવું હોય તેના કરતાં એક ઓછો એટલા ગુણોત્તરના ઘાતે આદિપદને ગુણવાથી આવશે. ૬. જો ત્રણ પદ પ્રમાણમાં હોય તો પહેલાને ત્રીજાનો ગુણાકાર બીજાના વર્ગ બરાબર છે માટે પહેલાને ત્રીજાના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજું પદ થશે. ૭. પણ જ્યારે બે પદની વચ્ચે એક કરતાં વધારે પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકવાં હોય ત્યારે તે પ્રમાણનું ગુણોત્તર ખોળી કહાડવું જોઈએ. પાંચમા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણના પહેલા પદને ગુણોત્તરે ગુણ્યાથી બીજું, પહેલાને ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણવાથી ત્રીજું એ પ્રમાણે પદો આવેછે, એટલે પાંચમા પદની = પહેલું × ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત છે, માટે પાંચમા પદને પહેલા પદે ભાગે તો ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત આવે, તેથી તેનું ચતુર્ઘાત મૂળ તે ગુણોત્તર થશે. ૮. ભૂમીતિ પ્રમાણમાં કોઈ પણ બે

પદોનો ગુણાકાર તે બે પદોથી સરખા અંતરનાં બે પદોના ગુણાકારની બરાબર છે. આ નિયમ બીજા નિયમ ઉપરથી સમજાશે. ગણિત પ્રમાણની પેઠે ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પણ પાંચ વાનાં આદિ, અંત, ગચ્છ, સર્વધન અને ગુણોત્તર હોયછે. તેમાંનાં કોઇ ત્રણ પદ આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનું પદ નીકળી શકશે. તે કહાડવાની સિદ્ધતા આ નીચે આપી છે તે ઉપરના આઠ નિયમો બરાબર સમજ્યાથી ઝટ ધ્યામાં ઉતરશે–

૧ આદિ, ગચ્છ અને ગુણોત્તર ઉપરથી અંતપદ કાઢવું હોય તો–

આદિપદ ને ગુણોત્તરના ગચ્છ ઓછા એક ઘાતે ગુણવા એટલે† $અં = આ \times ગુ^{ગ-૧}$ કારણ-ઉપરના પાંચમા નિયમ પ્રમાણે અંતપદ કહાડવું છે તે દશમું પદ હોય તો ગુણોત્તરની ગચ્છ અથવા પદ સંખ્યા દશ છે માટે ૧૦-૧=૯ ઘાતે આદિપદને ગુણવાથી દશમું પદ અથવા અંતપદ આવશે.

૨ આદિ ને અંત ઉપરથી વચલું પદ કહાડવું હોયતો—

આદિ ને અંતના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે મધ્યપદ=$\sqrt{આ \times અં}$

કારણ છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પહેલા ને ત્રીજા પદનો ગુણાકાર બીજાના વર્ગની બરાબર છે. તો પેહેલા ને ત્રીજાના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજા પદની બરાબર થવું જોઈએ. ઉપરના પ્રમાણમાં આ·

---

† કોઠા લખવામાં ગણિત પ્રમાણમાં પદના આખા નામને બદલે આદ્યાક્ષર લખવાનો જે નિયમ રાખ્યો હતો તેજ નિયમ આમાં પણ રાખ્યો છે. જેમકે ગુણોત્તરને બદલે ગુ. ઇ.

દિપદ પહેલું, અંતપદ ત્રીજું ને મધ્યપદ એ બીજું પદ છે એ સ્પષ્ટ છે. આ નિયમ ઉપરથી કોઇ પણ બે પદોને આદિ, અંત ધારીને વચમાં જોઇએ તેટલાં પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકાશે. જેમકે ૨ ને ૫૧૨ એની વચમાંનું પદ $\sqrt{૨\times૫૧૨}$=૩૨ તેમજ ૨ ને ૩૨ ની વચમાં ૮, અને ૩૨ અને ૫૧૨ ની વચમાં ૧૨૮ આવશે. તેથી ૨, ૮, ૩૨, ૧૨૮, ૫૧૨ આ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું. હજુ વધારે મૂકવાં હશે તો મૂકાશે. ૨ ને ૮ ની વચમાં ૪, ૮ અને ૩૨ ની વચમાં ૧૬, ૩૨ ને ૧૨૮ ની વચમાં ૬૪ અને ૧૨૮ ને ૫૧૨ની વચમાં ૨૫૬ આવશે. તેથી ૨, ૪, ૮, ૧૬, ૩૨, ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨ એ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું.

૩ આદિ, અંત ને ગચ્છ ઉપરથી ગુણોત્તર કહાડવું હોય તો–અંત ને આદિએ ભાગી તેનું ગચ્છ–૧ ઘાતમૂળ કહાડવું. એટલે

$$ગુ=\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}}$$

કારણ–ઉપરના ૧ લા કોઠા પ્રમાણે અંતપદ બરાબર આદિપદને ગુણોત્તરના ગચ્છ–૧ ઘાત ગણા કરીએ છીએ માટે અંતને આદિએ ભાગ્યાથી ગુણોત્તરનો ગચ્છ–૧ ઘાત આવશે, તેથી તે ભાગાકારનું ગચ્છ–૧ ઘાતમૂળ કહાડયાથી ગુણોત્તર આવવું જોઇએ.

સિદ્ધતા. $અં=આ\times ગુ^{ગ-૧}$.

બંને તરફ આદિએ ભાગ્યાથી $\frac{અં}{આ.}=ગુ^{ગ-૧}$

બંને તરફનું ગ–૧ ઘાતમૂળ કહાડયાથી $\sqrt[ગ-૧]{\frac{અં}{આ}}=ગુ$. એ જ.

૪. આદિ, ગુણોત્તરને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો—

$$સ=\frac{આ\ (ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$$

સિદ્ધતા—ધારો કે ૨, ૬, ૧૮, ૫૪, ૧૬૨, ૪૮૬ એ ૭ પદનો સરવાળો કરવો છે તો સર્વધન=૨+૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬ થયા. માટે બંને તરફનાને ત્રણ ગણા કર્યા તો ૩સ=૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬+૧૪૫૮ થયા તેમાંથી

સ=૨+૬+૧૮+૫૪+૧૬૨+૪૮૬ બાદ કર્યું તો—

૨સ=૧૪૫૮−૨ રહ્યા માટે $સ=\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ પણ ૧૪૫૮ એ ગુણોત્તરના ગચ્છ ઘાતને આદિએ ગુણીએ તેની બરાબર છે, ને−૨ એ આદિ પદની બરાબર છે તથા છેદના બે એ ગુણોત્તર−૧ની બરાબર છે માટે $સ=\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ અથવા $સ=\frac{આ\times ગુ^{ગ}-આ}{ગુ-૧}$

જમણી તરફના અંશમાંથી આ ગુણક કહાડયો તો—

$$સ=\frac{આ\ (ગુ^{ગ}-૧)}{ગુ-૧}$$ એ જવાબ.

૫ અંત, ગુણોત્તર ને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કહાડવું હોય તો ૧ લા કોઠા પ્રમાણે $અં=આ\times ગુ^{ગ-૧}$ બંને તરફ $ગુ^{ગ-૧}$ ભાગ્યા તો $\frac{અં}{ગુ^{ગ-૧}}=આ$ એ જવાબ.

૬ આદિ અંત ને ગુણોત્તર ઊપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો ઊપર ૪ થા કોઠાની સિદ્ધતા કરી તે પ્રમાણે.

સ=૧+૩+૯+૨૭+૮૧+૨૪૩ છે તેને ત્રગણા કર્યા તો.

૩ સ=૩+૯+૨૮+૮૧+૨૪૩+૨૭૮ આવ્યા.

તેમાંથી ૧ લું પદ સ=૧+૩+૯+૨૭+૮૧+૨૪૩ બાદ કર્યા તો.

૨સ=૭૨૯−૧ પણ ૭૨૯ તે ૨૪૩×૩ છે એટલે અંત× ગુણોત્તર છે. બંને તરફ બેએ ભાગ્યા તો $\text{સ}=\frac{૭૨૯-૧}{૨}$ અથવા $\frac{\text{અ}\times\text{ગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ આવ્યા તેથી. $\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$

૭. અંત, ગચ્છ, અને ગુણોત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો ૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ છે તેમાંથી આ ની કીંમત ૫ મા કોઠા પ્રમાણે લખી તો $\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}-\frac{\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}}{\text{ગુ}-૧}$ અથવા

$$\text{સ}=\frac{\frac{\text{અંગુ}^{\text{ગ}-૧}\times\text{ગુ}^{\text{ગ}}-\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}}{\text{ગુ}-૧}$$ અંશ અને છેદ બંનેને ગુ−૧ ગુણ્યા તો

$$\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}^{\text{ગ}+૧}-\text{અંગુ}^{\text{ગ}}-\text{અંગુ}+\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}$$ અંશમાં અં ગુણક કહાડયો તો

$$\text{સ}=\frac{\text{અં}(\text{ગુ}^{\text{ગ}+૧}-\text{ગુ}^{\text{ગ}}-\text{ગુ}+૧)}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}$$

૮ આદિ, અંતવે ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોય તો—

૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ એમાં ૩ જા કોઠા પ્રમાણે ગુણો-

ત્તરની કીમત લખી તો $\text{સ}=\frac{\text{અં}\times\sqrt[\text{ગ}-૧]{\frac{\text{અં}}{\text{આ}}}-\text{આ}}{\sqrt[\text{ગ}-૧]{\frac{\text{અં}}{\text{આ}}}-૧}$

૯ સર્વધન, આદીને અંત ઉપરથી ગુણોત્તર કહાડવું હોય તો-

૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{અંગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}$ ને ૪ થા કોઠા પ્રમાણે—

$\text{સ}=\frac{\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)}{\text{ગુ}-૧}$ તેથી એ બંને કીમત બરાબર છે માટે

$\frac{\text{અંગુ}-\text{આ}}{\text{ગુ}-૧}=\frac{\text{આ}(\text{ગુગ}-૧)}{\text{ગુ}-૧}$ બંને તરફ ગુ-૧ ગણ્યા કર્યા તો-

$\text{અંગુ}-\text{આ}=\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)$ પણ ૪ થા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)}{\text{ગુ}-૧}$ છે

તો છેદ ઉરાડયાથી $\text{સગુ}-\text{સ}=\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)$ આવ્યા અને ઉપર $\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)=\text{અંગુ}-\text{આ}$ છે તેથી $\text{સગુ}-\text{સ}=\text{અંગુ}-\text{આ}$ થવા જોઇએ. સ્થળાંતર કર્યાથી $\text{સગુ}-\text{અંગુ}=\text{સ}-\text{આ}$ અથવા $\text{ગુ}(\text{સ}-\text{અં})=\text{સ}-\text{આ}$ છે તો બંને તરફ સ-અં ભાગ્યાથી $\text{ગુ}=\frac{\text{સ}-\text{આ}}{\text{સ}-\text{અં}}$

૧૦ સર્વધન, અંત, ને ગુણોત્તર ઉપરથી આદિ કહાડવાનું ન-વમા કોઠા પ્રમાણે $\text{ગુ}=\frac{\text{સ}-\text{આ}}{\text{સ}-\text{અં}}$. છેદ ઉરાડયાથી $\text{સગુ}-\text{અંગુ}=\text{સ}-\text{આ}$.

સ્થળાંતર કર્યાથી $\text{આ}=\text{અંગુ}-\text{સગુ}+\text{સ}$ અથવા $\text{આ}=\text{અંગુ}-\text{સ}(\text{ગુ}-૧$ જ.

૧૧ સર્વધન, ગચ્છ અને ગુણોત્તર ઉપરથી આદી કહાડવાનું ૪ થા કોઠા પ્રમાણે $\text{સ}=\frac{\text{આ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)}{\text{ગુ}-૧}$ છેદ ઉરાડયા તો $\text{સગુ}-\text{સ}=\text{આ}\ (\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧)$

બંને તરફ $\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧$ ભાગ્યા તો $\frac{\text{સગુ}-\text{સ}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}=\text{આ}$.

૧૨ સર્વધન, ગુણોત્તર ને ગચ્છ ઉપરથી અંત કહાડવાનું. ૧ લા કોઠા પ્રમાણે $\text{અં}=\text{આગુ}^{\text{ગ}-૧}$ છે એમાં ૧૧ મા કોઠા પ્રમાણે આ ની કીંમત લખી તો $\text{અં}=\left(\frac{\text{સગુ}-\text{સ}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}\right)\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}$

અથવા $\text{અં}=\left(\frac{\text{સ}(\text{ગુ}-૧)}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}\right)\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}$ ગુણકે ગુણ્યાથી $\text{અં}=\frac{\text{સ}(\text{ગુ}^{\text{ગ}}-\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧})}{\text{ગુ}^{\text{ગ}}-૧}$ જ.

૧૩ આદિ, સર્વધનને ગુણોત્તર ઉપરથી અંત કહાડવાનું દશમા કોઠા પ્રમાણે $\text{આ}=\text{અંગુ}-\text{સ}\ (\text{ગુ}-૧)$ સ્થળાંતરથી $\text{આ}+\text{સ}(\text{ગુ}-૧)=\text{અંગુ}$ બંને તરફ ગુ એ ભાગ્યાથી—

$$\frac{\text{આ}+\text{સ}\ (\text{ગુ}-૧)}{\text{ગુ}}=\text{અં}$$ જવાબ.

ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢીના કોઠા.

ચઢતી શ્રેઢી.	ઉતરતી શ્રેઢી.
(૧) $\text{આ}=\frac{\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}$	(૧) $\text{આ}=\frac{\text{અં}}{\text{ગુ}^{\text{ગ}-૧}}$
(૨) $\text{આ}=\text{અંગુ}-\text{સ}\ (\text{ગુ}-૧)$	(૨) $\text{આ}=\text{અંગુ}+\text{સ}-\text{સગુ}$

(૩) $આ = \dfrac{સગુ - સ}{ગુ^{ગ} - ૧}$

(૪) $અં = સ(ગુ^{ગ} - ૧)$

(૫) $અં = સ(ગુ^{ગ} - ગુ^{ગ-૧})$

(૬) $અં = \dfrac{આ + સ(ગુ - ૧)}{ગુ}$

(૭) $ગુ = \sqrt[ગ-૧]{\dfrac{અં}{આ}}$

(૮) $ગુ = \dfrac{સ - આ}{સ - અં}$

(૯) $સ = \dfrac{આ\ (ગુ^{ગ} - ૧)}{ગુ - ૧}$

(૧૦) $સ = \dfrac{અંગુ - આ}{ગુ - ૧}$

(૧૧) $સ = અં\ \dfrac{(ગુ^{ગ+૧} - અંગુ^{ગ} - ગુ + ૧)}{ગુ^{ગ\ ૧}}$

(૧૨) $સ = \dfrac{\dfrac{અં \times ગ \sqrt[ગ-૧]{અ}}{અ - આ}}{\sqrt[ગ-૧]{\dfrac{અં}{આ}} - ૧}$

(૩) $આ = \dfrac{સ - સગુ}{૧ - ગુ^{ગ}}$

(૪) $અં = આગુ^{ગ-૧}$

(૫) $અં = \dfrac{સ(ગુ^{ગ-૧} - ગુ^{ગ})}{૧ - ગુ^{ગ}}$

(૬) $અં = \dfrac{આ\ (સ - સગુ)}{ગુ}$

(૭) $ગુ = \sqrt[ગ-૧]{\dfrac{અં}{આ}}$

(૮) $ગુ = \dfrac{સ - આ}{સ - અં}$

(૯) $સ = \dfrac{આ\ (૧ - ગુ^{ગ})}{૧ - ગુ}$

(૧૦) $સ = \dfrac{આ - અંગુ}{૧ - ગુ}$

અનંત શ્રેઢી હોય તો

$સ = \dfrac{આ}{૧\ ગુ}$

સમાપ્ત.